目　　录

编 写 说 明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学第二册(必修)》的教师教学用书. 编写时按教科书分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教科书分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、参考例题、相关链接，在每章的最后给出教科书中练习、习题和复习题的参考解答.

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教科书，包括教材线索、教学目标、教材分析、内容结构及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及参考例题仅供教师在教学过程中参考. 在相关链接中所提供的短文是编者精心撰写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握.

希望本书能成为教师使用教科书的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议. 谢谢!

编　者

第 3 章　三角函数

一、教学目标

在本章中，学生将通过实例，学习三角函数及其基本性质，体会三角函数在解决具有周期性变化规律的问题中的作用.

本章的教学目标是：

1. 了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化.

2. 借助单位圆理解任意三角函数（正弦、余弦、正切）的定义.

3. 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式$\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\text{，}\pi\pm\alpha\text{ 的正弦、余弦、正切}\right)$，能画出 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的图象，了解三角函数的周期性.

4. 借助图象理解正弦函数、余弦函数在 $[0，2\pi]$，正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right)$ 上的性质（如单调性、最大和最小值、图象与 x 轴的交点等）.

5. 理解同角三角函数的基本关系式：

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1，\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x.$$

6. 结合具体实例，了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义，能借助计算器或计算机画出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，观察参数 A，ω，φ 对函数图象变化的影响.

7. 会用三角函数解决一些简单的实际问题，体会三角函数是描述周期性变化现象的重要函数模型.

二、教材说明

1. 在三角函数的教学中，教师应根据学生的生活经验，创设丰富的情境，使学生体会三角函数模型的意义.

2. 在三角函数的教学中，应发挥单位圆的作用. 单位圆可以帮助学生直观地认识任意角、任意角的三角函数，理解三角函数的周期性、诱导公式、同角三角函数关系式以及三角函数的图象和基本性质. 借助单位圆的直观性，教师可以引导学生自主探索三角函数的有关性质，培养他们分析问题和解决问题的能力.

3. 提醒学生重视学科之间的联系与综合，在学习其他学科的相关内容（如单摆运动、波的传播、交流电）时，注意运用三角函数来分析和理解.

4. 弧度是学生比较难接受的概念，教学中应使学生体会弧度也是一种度量的单位

$\left(\text{圆周的}\frac{1}{2\pi}\text{所对的圆心角，或周角的}\frac{1}{2\pi}\right)$. 随着后续课程的学习，他们将会逐步理解这一概念，在此不必深究.

5. 在本章的内容中图象占有相当大的比重，是数形结合思想的具体体现. 三角函数图象对于研究三角函数的性质起着很重要的作用，通过观察函数图象的变化趋势可以总结出函数的性质. 所以在本章中要特别注意从函数图象观察得到相应的函数性质，同时在研究性质时也要用函数图象来印证. 在教学过程中要注意培养学生绘制某些简单三角函数图象的技能，记住某些常见的三角函数图象的草图，养成利用函数图象研究函数性质和分析问题的习惯.

6. 在本章的教学中，应鼓励学生使用计算机探索和解决问题. 例如，分析 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$中参数变化对函数的影响等；在三角函数中可以插入数学探究或数学建模活动.

三、课时安排建议

本章的教学时间大约需要 **16** 课时，建议分配如下（仅供参考）：

3.1　弧度制与任意角	
3.1.1　角的概念的推广	1 课时
3.1.2　弧度制	1 课时
3.2　任意角的三角函数	
3.2.1　任意角三角函数的定义	2 课时
3.2.2　同角三角函数之间的关系	1 课时
3.2.3　诱导公式	2 课时
3.3　三角函数的图象与性质	
3.3.1　正弦函数、余弦函数的图象与性质	2 课时
3.3.2　正切函数的图象与性质	1 课时
3.4　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质	
3.4.1　三角函数的周期性	1 课时
3.4.2　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质	2 课时
3.4.3　应用举例	1 课时
小结与复习	2 课时

四、教学建议

1. 引导学生用运动的观点来重新认识角，学生能很自然地理解角的概念的推广，同时要充分利用生活中的实例来直观说明.

2. “角度制”与“弧度制”都是度量角的单位制，注意结合生活中的其他单位制加以说明，例如，“一双鞋＝两只鞋”，“1 公里＝1 000 米”等等，对同一事物的单位制是可以互

换的.

3. 在理解 π 弧度为 $180°$ 时，不要让学生误认为 $\pi=180°$，而忽视它本身是一个无理数.

4. 利用与单位圆有关的有向线段，将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值分别用它们的几何形式表示出来，帮助学生形成数形结合的思想.

5. 要结合函数的概念，从本质上理解三角函数的概念以及这些三角函数的图象与性质.

6. 尽可能多地利用多媒体的教学手段来演示三角函数的图象以及三角函数图象的变换规律.

7. 建议用“奇变偶不变，符号看象限”来记忆诱导公式.

8. 指导学生在现实生活中寻找与三角函数有关的自然现象，例如，水波、大风车、潮涨潮落等.

五、评价建议

1. 学生对基础知识和基本技能的理解与掌握是数学教学的基本要求，也是评价学生学习的基本内容. 评价应关注学生学习能否建立不同分支和不同内容之间的联系，数学与日常生活的联系，数学与其他学科的联系. 例如，安排的 3.4.3 节“应用举例”，目的是让学生感受三角函数在解决具有周期性变化规律的问题中的作用，体验三角函数与日常生活和其他学科的联系，以使学生体会三角函数的价值和作用，增强应用意识. 由此可引导学生数学建模、构建函数知识结构图. 评价时应特别重视考察学生能否从实际情境中抽象出数学知识以及能否应用数学知识解决问题，能否选择有效的方法和手段收集信息、联系相关知识、提出解决问题的思路，建立恰当的数学模型，进而尝试解决问题. 对数学基本技能的评价，应关注学生能否在理解方法的基础上，针对问题特点进行合理选择，进而熟练运用.

2. 要重视学生做数学题的过程，充分发挥数学作业在学生评价中的作用. 对作业的评价可以是量化的，也可以是定性的. 评价过程应积极主动、简单可行，避免增加学生的负担.

3. 笔试仍是定量评价的重要方式，但要注重考查对数学概念的理解、对数学思想方法的掌握（特别是数形结合的思想，本章内容基本上都是借助图形来分析解决问题）以及应用数学解决实际问题的能力等，为接下来的“向量”、“三角恒等变换”的学习打下坚实的基础. 因此我们可以进行一次评估测试，了解学生掌握基础知识和基本技能的情况. 特别是关注学生利用数形结合思想去探究、分析、解决问题的能力.

4. 注意以前的《教学大纲》的“教学目标”到现在的《课程标准》的“内容与要求”的变化：

（1）对于任意角、弧度由《教学大纲》的理解变为《课程标准》的了解.

（2）对任意角的正弦、余弦、正切的定义由《教学大纲》的掌握变为《课程标准》的理解，并删除了余切、正割、余割的定义.

（3）同角基本关系式由《教学大纲》的掌握变为《课程标准》的理解.

(4) 三角函数的周期性由《教学大纲》的理解变为《课程标准》的了解.

(5) 对正弦函数、余弦函数《课程标准》仅强调理解在 $[0, 2\pi]$ 上的性质，对正切函数《课程标准》仅强调理解在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的性质.

(6)《课程标准》删除了由已知三角函数值求角和反三角函数的内容.

(7) 对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象中 A，ω，φ 由《教学大纲》的理解其物理意义，变为《课程标准》的观察对函数图象变化的影响.

5. 应重视计算器、计算机等现代教育技术手段在评价学生学习中的应用. 例如，三角函数的图象和性质可通过应用多媒体生动显示出来，学生容易得出结论.

3.1 弧度制与任意角

3.1.1 角的概念的推广

教材线索

本节从日常生活中大量的大于360°的角以及按不同方向旋转而成的角入手，说明扩充角的必要性，从而形成正角、负角、零角的概念，明确“规定”的实际意义，突出角的概念的理解与掌握．然后通过具体问题，让学生从不同角度作答，理解终边相同的角的概念，并给出表达式，从特殊到一般，归纳出终边相同的角的表示方法．

教学目标

1．推广角的概念，引入正角、负角、零角的定义；象限角、坐标轴上的角的概念；终边相同的角的表示方法．

2．理解并掌握正角、负角、零角的定义；理解任意角的概念，掌握所有与角 α 终边相同的角的表示方法．

教材分析

1．重点：

（1）理解并掌握正角、负角、零角、象限角的概念．

（2）掌握终边相同的角的表示方法及判定．

2．难点：

把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来．

3．角的概念的推广

（1）正角、负角、零角的定义

正角、负角是用来表示具有相反意义的旋转量的．其正、负规定出于习惯，就像正、负数的规定一样．如果一条射线没有作任何旋转，那么说它形成一个零角；零角无正负，就像实数0没有正负一样．

（2）角的概念推广后，引导学生进一步辨别“0°到90°的角”、“第一象限角”、“锐角”

和“小于 90°的角”这些概念.

4. 与 α 终边相同的角 $\beta=\alpha+k\cdot360°$，$k\in\mathbf{Z}$ 中

(1) ①$k\in\mathbf{Z}$；

②α 是任意角；

③终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同，终边相同的角有无限多个，它们相差 360°的整数倍.

(2) 若 $k\in\mathbf{Z}$，则 $-k\in\mathbf{Z}$，因此 $\{\beta\mid\beta=\alpha-k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$ 同样表示所有与 α 终边相同的角组成的集合.

教学建议

从日常生活中大量的大于 360°的角以及按不同方向旋转而成的角的实例，说明扩充角的范围的必要性，像区别一对具有相反意义的量一样，为了表示按顺、逆时针方向旋转而成的角的概念的扩展具有一定的重要性，而这些定义或规定都是在初中所学知识的基础上，运用合情推理或类比的方法得到的. 要注意新学内容与初中知识的联系与区别，概念需要辨析才会清楚，像“锐角”、“第一象限角”、“小于 90°的角”等概念，可通过学生合作学习或相互提问补充的方法来掌握，终边相同的角，正、负角可借助电脑等多媒体工具进行演示，利用动态效果，使学生更好地掌握知识，明辨是非.

例题解析

例 1 写出第三象限的角的集合.

分析 先写 0°～360°范围内的角 α，$180°<\alpha<270°$，然后分别用与 180°和 270°终边相同的角的形式表示.

解 第三象限的角的集合为 $\{\alpha\mid180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$

(或 $\{\alpha\mid-180°+k\cdot360°<\alpha<-90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$；

也可以表示为 $\{\alpha\mid180°-k\cdot360°<\alpha<270°-k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$ 等.

说明 用集合和符号来表示终边相同的角，涉及任意角、象限角、终边相同的角等概念，这是本节学习的主要难点. 教学时可以利用信息技术，在平面内建立适当的坐标系，画出任意角，并测量出角的大小，同时旋转角的终边，观察角的变化规律，从而将数、形联系起来，使角的几何表示和集合表示相结合.

例 2 写出终边在 y 轴上的角的集合.

分析 先求出终边分别在 y 轴非负半轴和非正半轴的角的集合，再取它们的并集.

解 终边在 y 轴非负半轴上的角的集合是 $M_1=\{\alpha\mid\alpha=90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$，终边在 y 轴非正半轴上的角的集合是 $M_2=\{\alpha\mid\alpha=270°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$，故终边在 y 轴上的角的集合是：$M=M_1\cup M_2=\{\alpha\mid\alpha=90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha\mid\alpha=270°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha\mid\alpha=90°+2k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha\mid\alpha=90°+(2k+1)\cdot180°, k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha\mid\alpha=90°+n\cdot180°, n\in\mathbf{Z}\}$.

说明 目的是让学生理解终边在坐标轴上的角的表示．教学中，应引导学生体会用集合表示终边相同的角时，表示方式并不唯一，要注意采用简约的形式．

拓展 1．写出终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的角的集合．

2．写出终边在坐标轴上的角的集合．

相关链接

角度制的历史

一条射线原来的位置是 OA，绕着它的端点 O 旋转，直到终边 OB 和始边 OA 重合，这时所成的角叫周角．把周角分成 360 等份，每一份就叫作 1 度的角．

把周角分成 360 等份，这种做法起源于古代巴比伦人．他们为了建立历法，把圆周分成 360 等份，这就相当于把周角分成 360 等份．为什么要把圆周分成 360 等份呢？有这样几种解释．有人认为古巴比伦人最初以 360 天为一年，将圆周分成 360 等份，太阳就每天行一“等份”．但很多人认为古巴比伦人很早就知道每年有 365 天，所以上面的说法是不可信的．较多的数学史家认为，相比之下下面的说法似乎更有道理．在古巴比伦时代，曾有一种很大的距离单位——巴比伦里，差不多等于现在的英里的 7 倍，由于巴比伦里被用来测量较长的距离，很自然地，它也成为一种时间单位，即走一巴比伦里所需的时间．后来，在公元前 1 000 年内，当古巴比伦天文学达到了保存天象系统记录的阶段时，古巴比伦的“时间一里”就是用来测量时间的长短．因为发现一整天等于 12 个“时间一里”，并且一整天等于天空转一周，所以，一个完整的圆周被分为 12 等份．但是为了方便起见，把古巴比伦的“时间一里”分成 30 等份，于是，便把一个完整的圆周分为 12×30 等份．

后来，每一等份变成了“度”．“度”来自拉丁文，原来是“步”、“级”的意思．

3.1.2 弧度制

教材线索

本节首先从一个简单的例题引出弧度制的定义，并推导出角度制与弧度制之间的换算公式，最后推导出弧长及扇形的面积公式．

教学目标

1．理解并掌握弧度制的定义，领会弧度制定义的合理性．

2．熟练地进行角度制与弧度制的换算．

3．掌握并运用弧度制表示的弧长公式、扇形面积公式解题．

教材分析

1．重点：理解弧度制公式引入的必要性，掌握定义，能熟练地进行角度制与弧度制的互化．

2．难点：弧度的概念及其与角度的关系．

3．用公式 $|x|=\frac{l}{r}$ 求圆心角时，应强调其结果是圆心角的弧度数的绝对值，在物理学中计算角速度时经常要用到它，因此，要求学生掌握这个公式及其两种变形公式 $l=|x|r$ 及 $r=\frac{l}{|x|}(|x|\neq0)$．运用这两个公式时，如果已知的角以“度”为单位，应先把它化成弧度数后再计算．可以看出，这些公式各有各的用处．

4．讲完弧度制后，写出与角 α 终边相同的角时，要根据角 α 的单位来决定与角 α 终边相同的角的单位，也就是说，两者所采用的单位制必须一致，防止出现 $\frac{\pi}{3}+k\cdot360^\circ$ 或 $60^\circ+2k\pi$ 一类的写法．

5．熟记一些特殊角的弧度数，1 弧度的角在第一象限，2，3 弧度的角在第二象限，4 弧度的角在第三象限，5 弧度的角在第四象限．

教学建议

讲清弧度角的定义，使学生建立弧度的概念，理解弧度制的定义，达到突破难点的目的．通过电教手段的直观性，使学生进一步理解弧度作为角的度量单位的可靠性、可行性．注意角度与弧度两种度量制的对比研究，体会弧度制的优越性．

例题解析

例 1　在直径为 20 cm 的圆中，求下列各圆心角所对的弧长：

（1）$\frac{4\pi}{3}$；　　　　（2）165°．

分析　应用弧长公式：$l=|x|r$ 即可求解．

解　（1）弧长 $l=|x|r=\frac{4\pi}{3}\times10=\frac{40\pi}{3}$(cm)．

（2）$\because 165^\circ=\frac{\pi}{180}\times165=\frac{11\pi}{12}$，

$\therefore l=|x|r=\frac{11\pi}{12}\times 10=\frac{55\pi}{6}$(cm).

例 2 扇形 AOB 的周长为 8 cm，

（1）若这个扇形的面积为 3 cm^2，求圆心角的大小；

（2）求这个扇形的面积取得最大值时圆心角的大小和弧长 AB.

分析 由于扇形的周长和面积都由扇形的半径和弧长确定，故可根据已知条件先确定半径和弧长，再求其他元素.

解 设这个扇形的半径为 R，弧长为 l，圆心角为 α（$\alpha>0$）.

（1）由已知可得$\begin{cases}2R+l=8,\\ \frac{1}{2}lR=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}R_1=3,\\ l_1=2\end{cases}$ 或$\begin{cases}R_2=1,\\ l_2=6.\end{cases}$

由 $\alpha=\frac{l}{R}$ 可得 $\alpha=\frac{2}{3}$ 或 6.

（2）扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}(8-2R)\cdot R=-(R-2)^2+4\quad(0<R<4)$，

当且仅当 $R=2$ 时，S 取得最大值 4，这时 $l=8-2R=4$ 可求出

$\alpha=\frac{l}{R}=2$.

又$\because 0<2<\pi$，

$\therefore |AB|=2R\sin\frac{\alpha}{2}=4\sin 1$.

相关链接

圆周率

因为任何两个圆都相似，所以所有圆的周长和它的直径的比都等于同一常数，我们把这一常数叫“圆周率”.

国际上，人们习惯把圆周率用符号 π 表示. 1600 年，英国的威廉·奥托兰特首先使用 $\frac{\pi}{\delta}$ 表示圆周率，他的理由是，因为 π 是希腊文圆周的第一个字母，奥托兰特用它来表示圆周长，而 δ 是希腊文直径的第一个字母，奥托兰特用它来表示直径. 根据圆周率的定义，理应用 $\frac{\pi}{\delta}$ 表示圆周率，但在推算圆周率的过程中，人们常用直径为 1 的圆，即令 $\delta=1$，这样 $\frac{\pi}{\delta}$ 就等于 π 了. 1706 年英国的琼斯首先改用 π 表示圆周率，后来被数学家广泛接受，一直沿用至今.

π 是数学中的一个重要常数，它在很多公式中都出现了身影，如圆周长 $C=2\pi R$，圆面

积 $S=\pi R^2$，椭圆面积 $S=\pi ab$，球体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 等.

另外，伽利略在研究钟摆时，发现钟摆周期 T 具有公式：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

库仑在研究两个带电电荷的相互作用力时，得到公式：

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q_1Q_2}{r^2}.$$

高斯在研究测量误差分布时，得到“正态分布”的密度函数：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

可见，π 除在几何上表示圆周长与直径的比值即圆周率外，还有很广泛的应用.

π 值到底是多少呢？在数学发展的历史上，许多国家的数学家都曾寻找过比前人更精确的 π 值，因此，圆周率 π 的精确程度可以作为衡量这个国家数学发展水平的标志. 1974 年勒让德证明了 π 和 π^2 都是无理数，即不能用两个整数的比表示. 1882 年德国数学家林德曼证明了 π 是超越数，即不可能是一个整系数代数方程的根. 尽管如此，从古至今，还是有很多人都在用各种方法求 π 的近似值.

我国古代在求 π 的近似值的计算方面处于世界领先地位. 公元 1 世纪，刘歆在为王莽制造圆柱形标准器时，已得 π 的一个近似值 3.154. 公元 3 世纪，三国时期吴国天文学家兼数学家王番采用 $\pi=\frac{142}{45}$或 3.155 5. 与王番同时的刘徽则得出“徽率”$\pi=3.141\ 6$. 之后 200 年，杰出的数学家祖冲之又得到了“约率”$\pi=\frac{22}{7}$和“密率”$\pi=\frac{355}{113}$，即“祖率”，并继续努力求得 $3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7$. 而印度数学家阿耶哈达直到约公元 450 年才得到 $\pi=3.141\ 6$. 法国数学家韦达到公元 1593 年才得到 $3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7$ 这个结论.

3.2 任意角的三角函数

3.2.1 任意角三角函数的定义

教材线索

本节先由初中学过的锐角三角函数引入任意角的三角函数，通过具体实例解决如何求角 α 的正弦、余弦和正切函数值，再用有向线段表示三角函数，即三角函数的几何表示——三角函数线，并利用三角函数线判断三角函数值在各个象限的符号.

教学目标

1. 理解并掌握任意角三角函数的定义.
2. 掌握三角函数的定义域.
3. 正确利用与单位圆有关的有向线段，将任意角 α 的正弦、余弦和正切函数值表示出来，即用正弦线、余弦线和正切线表示.
4. 理解并掌握各种三角函数值在各象限内的符号.

教材分析

1. 重点：任意角的三角函数的定义.
2. 难点：任意角的三角函数的定义及正弦、余弦、正切这三种三角函数的几何表示.
3. 三角函数是用角 α 终边上任一点 P 的坐标来定义的，由相似三角形的性质可知，三个三角函数定义中的比值 $\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$ 的大小都与点 P 在角的终边上的位置无关，在弧度制下，三角函数又可以看成是以弧度数为自变量或以实数为自变量的函数.
4. 当我们将点 P 取在角 α 的终边与单位圆的交点处，就可以将三角函数用有向线段——三角函数线来表示，三角函数线也可以看成是三角函数的几何定义.
5. 三角函数的定义是学习本章的关键，是研究三角函数的基本出发点. 例如，三角函数在各个象限的符号，既可以从定义中由坐标的符号推出，又可以由角的终边在各象限的三角函数线的数值看出. 三角函数的定义域既可以从定义式各比值中坐标允许值的范围看出，

又可以从三角函数对应的终边允许的位置看出.

教学建议

在讲解三角函数线时强调：正弦线、正切线的方向与 y 轴一致，向上为正，向下为负，它们的数值分别等于角 α 的正弦值、正切值；余弦线的方向与 x 轴一致，向右为正，向左为负，它的数值等于角 α 的余弦值. 这里关键是讲清以下三个式子的全部含义（如教材 P. 17 图 3－15）：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y=DP,$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x=OD.$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{DP}{OD}=\frac{AT}{OA}=AT.$$

此外，还应告诉学生，作正切线时，必须使 AT（这里起点 A 一定是单位圆与 x 轴的非负半轴的交点）在点 A 处与单位圆相切，终点 T 是切线与角 α 的终边的交点.

函数的定义域是函数概念的三要素（定义域、对应法则、值域）之一，因此，对正弦、余弦、正切三种函数定义域的教学要十分重视. 确定这三种三角函数的定义域时，要抓住分母等于 0 时比值无意义这一关键点. 为此需要注意：若 O 为原点，如果点 P 不是原点，那么角的终点 OP 落在坐标轴上的充要条件是点 P 的坐标中有且只有一个为 0. 由此可以启发学生自己得出结论，其中对于正切函数的定义域要特别小心.

三角函数值的符号也十分重要，后面几乎处处要用到它，应要求学生在充分理解的基础上予以掌握. 另外，让学生会利用三角函数线结合图形较快地解决一些问题.

例题解析

例 1 已知点 $P(3, y)$ 在角 α 的终边上，且满足 $y<0$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，试求 $\tan\alpha$ 的值.

分析 由 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$x=3$，知需求出 y，又由 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{3}{5}$，且 $y<0$ 可求出 y.

解 由已知可得 $\frac{3}{\sqrt{9+y^2}}=\frac{3}{5}$，可解得 $y=\pm4$.

又 $y<0$，

$\therefore y=-4$. $\therefore \tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}$.

说明 本例题是根据定义求一个角的三角函数值，目的是为了巩固任意角三角函数的定义.

例 2 用单位圆证明：

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$；　　　(2) $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

分析　(1) 用“三角形中任意两边之和大于第三边”即可得证.

(2) 在单位圆中，用 $S_{\triangle OAP}<S_{扇形AOP}<S_{\triangle OAT}$ 可证得，

或用 $|AT|>\overset{\frown}{AP}>|AP|>|PD|$ 证得（如教材 P.17 图 3－15(a)).

说明　在三角函数的教学中，应发挥单位圆的作用. 单位圆可以帮助学生直观地认识任意角、任意角的三角函数，理解三角函数的周期性、诱导公式、同角三角函数关系式，以及三角函数的图象和基本性质. 借助单位圆的直观性，教师可以引导学生自主地探究三角函数的有关性质，培养他们分析问题和解决问题的能力.

相关链接

关于三角函数的符号

我们现在通用的三角函数符号 sin，cos，tan，cot，sec，csc 是随着数学的发展，逐步演变而成的，是许多世纪以来人类劳动的成果.

1464 年德国数学家雷格蒙塔努斯发表了他的名著《论一般三角形》，正式使三角学脱离天文学而成为一门独立科目，他用“sine”表示正弦.

1620 年，英国人根日尔写了一本《炮兵测量学》，用“cosine”表示余弦，用“cotangent”表示余切.

1640 年，丹麦人托玛斯芬克写了一本《圆几何学》，用“tangent”表示正切，用“secant”表示正割.

1596 年哥白尼的学生，德国人利提克斯发表作品《宫廷乐曲》，他采用“cosecant”表示余割.

1623 年德国人阿贝尔特・格洛德首先提出把正弦简写为“sin”，正切简写为“tan”，正割简写为“sec”.

1675 年，英国人奥曲特提出把余弦简写为“cos”，余切简写为“cot”，余割简写为“csc”.

从 18 世纪的数学家欧拉开始使用目前通用的 6 个三角函数符号. 20 世纪八九十年代，我国曾把正切、余切分别简记为“tg”，“ctg”.

3.2.2 同角三角函数之间的关系

教材线索

本节先由正弦线、余弦线及三角函数的定义推导出同角三角函数之间的关系，然后是公式的运用.

教学目标

1. 牢固掌握同角三角函数的两个关系式并能灵活运用于解题，提高学生分析、解决三角问题的思维能力.

2. 灵活运用同角三角函数关系式的不同变形，提高三角恒等变形的能力，进一步树立化归的思想方法.

教材分析

1. 重点：理解并掌握同角三角函数关系式.

2. 难点：已知某角的一个三角函数值，求其余的各三角函数值时符号的确定.

3. 掌握同角三角函数关系的等价形式，如：

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，

$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha$，$\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$.

4. 同角三角函数关系式的应用

(1) 已知某任意角的正弦、余弦、正切中的一个求其他两个，这里应特别注意开方运算时根号前正、负号的选取，应根据题设条件是否指明角所在的象限，确定最后结果是一组解还是两组解.

(2) 化简三角函数式，化简是一种不指明答案的恒等变形，三角函数化为最简形式的标准是相对的，一般是指函数种类要最少，项数要最少，函数次数尽量低，能求出数值的要求出数值，尽量使分母不含三角形式和根式.

(3) 证明简单的三角恒等式，一般方法有三种：即由复杂的一边证到简单的一边，证明左、右两边等于同一式子，证明与原恒等式等价的式子从而推出原式成立.

5. 同角三角函数变换，要突出弦、切互化，回到三角函数的定义也不失为一种好的方法，同时也要注意灵活运用代数变形的各种手段，如消元法等.

6. 同角三角函数变换的几个特殊式子

（1）$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$ 三个式子中，已知其中一个，可以求其他两个．这是由于这三个式子由下面两个关系式联系着：

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$，

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha$.

（2）已知 $\tan\alpha=m$（$m\neq0$），求有关 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的齐次分式，如求 $y=\dfrac{3\sin\alpha-4\cos\alpha}{2\sin\alpha+\cos\alpha}$ 的值时，只要将其分子分母同除以 $\cos\alpha$，就可得到 $y=\dfrac{3\tan\alpha-4}{2\tan\alpha+1}=\dfrac{3m-4}{2m+1}$，对于形如 $y=\dfrac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{a_1\sin^2\alpha+b_1\sin\alpha\cos\alpha+c_1\cos^2\alpha}$ 的齐次分式也可类似处理，分子分母同除以 $\cos^2\alpha$.

教学建议

三角函数式的化简变形，除了靠记住正确的公式外，贵在活用，要熟记同角三角函数之间的平方关系、商数关系这两组常用公式．掌握几类求值题型：给角求值，给值求值，给方程关系式求值及化简求值．运用同角三角函数关系式化简三角函数式，要体会运用公式的技巧及公式的常规变形方向，运用公式的过程就是熟悉公式的过程，反之也会提高三角函数式变形、化简的熟练程度.

例题解析

例 1　已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，求 $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cot\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\tan\alpha}$ 的值.

分析　由于 $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$，从方程的观点来看，$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$ 这三个量被两个方程联系在一起，因而知其一必可求其二，必须熟练掌握.

解　
$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{1+\cot\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\tan\alpha}&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\\&=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha\\&=\pm\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}\\&=\pm\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}\\&=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

说明　本题与教材 P. 21 的例 4 类似，是把例 4 的已知当结论进行逆用，以加深学生对公式的正用与逆用.

例 2　已知 $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-3$，求 $\dfrac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\sin\alpha-4\cos\alpha}$ 的值.

解　由已知可得 $\tan\alpha=2\neq0$，于是

$\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\sin\alpha-4\cos\alpha}=\frac{3\tan\alpha-2}{5\tan\alpha-4}=\frac{2}{3}$.

说明 本题与教材 P.28 习题 2“温故而知新”中的第 11 题是同一类型的题．目的是让学生更好地运用公式 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$来解决问题．这是一组在已知 $\tan\alpha=m$ 的条件下，求关于 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的齐次式的值的问题．解这类题时必须注意：

(1) 一定是关于 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的齐次式或能转化为齐次式的三角函数式；

(2) 由 $\cos\alpha\neq0$，可用 $\cos\alpha$ 除之，这样可以将被求式化为关于 $\tan\alpha$ 的表达式，代入 $\tan\alpha=m$ 即可．

相关链接

三角学

三角学是研究三角函数与解三角函数的数学学科．它主要包括平面三角和球面三角两部分．

和其他学科一样，三角学是在解决实际问题的过程中发展起来的．它的发展和天文学、几何学有着不可分割的关系，早期的三角学是隶属于天文学的．天文学的发展是由于编制历法的需要，而历法对于农业和畜牧业都是极其重要的．

“三角学”一词来自希腊文，原意是三角形的测量，也就是解三角形，这是三角学的基本问题之一，后来范围逐渐扩大，成为研究三角函数及其应用的学科．它的发展，大体可分为三个时期：

第一时期是从远古到 11 世纪以前．在这一时期，数学著作中还看不到角的函数的概念，甚至一般都还没有提出三角形中角与边之间的关系．但人们能够利用当时已知的几何知识，解决三角学范围内的一些问题，如根据正多边形边长与外接圆半径的关系，计算弧的长度，这是解决三角问题的重要方法．

第二时期是从 11 世纪到 18 世纪．三角学脱离天文学而独立，成为数学的一个分支．在这一时期里编制了大量的三角函数表．从第一时期到第二时期的过渡，主要发生在中亚细亚地区．

1250 年左右，阿拉伯天文学家纳速拉丁著《完全四边形》，总结了在三角方面的成就，并把它从天文学中抽象出来加以系统阐述，由于取材和使用范围受到很大的限制，没有使三角学从天文学中独立出来，但它为三角学的诞生奠定了基础．

正式使三角学成为一门独立学科的是德国雷格蒙塔努斯．他积极收集、翻译、出版古希腊和阿拉伯数学家的著作，并努力了解、总结、继承前人的工作，发表了标志三角学成为一

门独立学科的著作——《论一般三角形》，雷格蒙塔努斯把平面三角、球面三角的知识综合起来，已有了现代三角学的雏形.

第三时期是 18 世纪以后. 以欧拉的《无穷小分析引论》为代表，讨论三角形的三角学进一步演变成为研究三角函数的三角学，三角学成为分析学的一个分支.

欧拉首先提出三角函数的概念，使三角学从静止地研究解三角形的问题发展到用三角函数去反映运动和变化的过程. 欧拉还引进了三角函数的一些符号，提出将弧度制与圆弧的度量统一起来，并把三角公式推广到一般情况. 不仅如此，欧拉还发现了著名的欧拉公式，即 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，把三角函数与指数函数联系在一起. 这样，经过几千年的努力，终于建立了有理论基础且有广泛实用价值的现代三角学.

据《史记》记载，我国很早就有了三角测量的方法. 公元前 2000 年，大禹治水时就利用简单的三角术进行山川地形的测量. 在《周髀算经》中记载了商高用矩尺进行测量的方法. 刘徽在《海岛算经》中通过九个实例，对于“重差术”作了系统的总结，并且提出根据三次和四次测量结果的推算公式，用以解决复杂的测量问题. 只因当时缺乏角度概念，未能发展成完整的三角学，但这些成就在世界上都具有极其重要的地位.

三角学输入我国，开始于明崇祯四年（1631 年）. 这一年，邓玉函、汤若望与徐光启合编了《大测》，这是我国第一部三角学著作. 后来徐光启等人又编写了《测量全义》，其中有平面三角和球面三角的论述. 那时，三角学在欧洲还没有很好的版本.

3.2.3 诱导公式

教材线索

本节先推导出终边相同的角的三角函数值相同，然后利用三角函数线及三角函数的定义逐一推导出 $-\alpha$，$\pi+\alpha$，$\pi-\alpha$，$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的三角函数值.

教学目标

1. 理解诱导公式的推导方法.
2. 掌握并运用诱导公式求三角函数值，化简或证明三角函数式.
3. 树立化归思想方法，将任意角的三角函数值问题转化为 $0^\circ\sim90^\circ$ 的角的三角函数值问题，培养学生化归转化能力.

教材分析

1. 重点：理解并掌握诱导公式.

2．难点：诱导公式的推导方法．

3．诱导公式的记忆法则：奇变偶不变，符号看象限．

4．在后续学习中，要逐步加深对诱导公式的理解，三角函数的诱导公式实质上是三角函数的周期性和对称性，$\alpha+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）的诱导公式指明了三角函数的周期性，$-\alpha$ 的诱导公式指明了三角函数的奇偶性，其他诱导公式也分别指明了三角函数的对称性，例如，$\sin(\pi-x)=\sin x$ 指明了函数 $y=\sin x$ 的图象是轴对称图形，一条对称轴是 $x=\frac{\pi}{2}$；$\cos(\pi-x)=-\cos x$ 指明了函数 $y=\cos x$ 的图象是中心对称图形，它的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$．

教学建议

讲诱导公式的目的之一是把求任意角的三角函数值转化为求锐角三角函数值，本节第一段已经明确指明了这一目的，教学时，应该把这个意思向学生作一交代．在推导教材 P.26 的公式时，讲清“角（$\pi+\alpha$）的终边就是角 α 的终边的反向延长线，角（$\pi+\alpha$）的终边与单位圆的交点 P_1 与 P 关于原点 O 对称”以及“α 与 $-\alpha$”这两个角的终边关于 x 轴对称．在此基础上，分别复习关于 x 轴、y 轴，与原点对称的两个点的坐标间的关系，然后写出点 P、P_1 的坐标．建议教师把诱导公式补充完整，如教材 P.28 练习中的第 2 题的（$2\pi-\alpha$）及第 4 题的 $\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$，有助于学生灵活解题，简化解题过程．

例题解析

例　化简：$\dfrac{\sqrt{1+2\sin 430^\circ\cos 250^\circ}}{\sin(-70^\circ)+\cos 790^\circ}$．

分析　大于 360°的角，可用公式将其化为 0°～360°间的角，分子要化为可开方的完全平方式，另外要活用 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$．

解　原式$=\dfrac{\sqrt{1+2\sin(360^\circ+70^\circ)\cos(180^\circ+70^\circ)}}{-\sin 70^\circ+\cos(2\times 360^\circ+70^\circ)}$

$$=\frac{\sqrt{1-2\sin 70^\circ\cos 70^\circ}}{\cos 70^\circ-\sin 70^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{(\cos 70^\circ-\sin 70^\circ)^2}}{\cos 70^\circ-\sin 70^\circ}$$

$$=\frac{\sin 70^\circ-\cos 70^\circ}{\cos 70^\circ-\sin 70^\circ}=-1.$$

说明　由于三角函数式的变形灵活多样，所以合理地运用诱导公式进行三角函数式的变形，对初学诱导公式的学生来说有一定的困难．教学中要注意控制难度，立足教材当中的问题进行变式训练．

相关链接

诱导公式的理解与应用

诱导公式贯穿于整章三角函数，是三角函数的一个重要工具，在求值、化简、证明等问题中都少不了它，因此，如何巧妙地来记忆它并能熟练地使用它是我们学好三角函数这一章的基础．下面谈谈对诱导公式的深入理解以及一些简单的应用．

1．诱导公式可概括为：

（1）$2k\pi\pm\alpha$，$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$（$k\in\mathbf{Z}$）的三角函数值等于α的同名函数值，前面的符号由将α看成锐角时，根据$2k\pi\pm\alpha$，$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$（$k\in\mathbf{Z}$）所在象限的三角函数值的符号去确定；

（2）$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数值等于α的余函数值（“sin”的余函数为“cos”，“tan”的余函数为“cot”），同样地，前面的符号由将α看成锐角时，根据$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$所在象限的三角函数值的符号去确定．

诱导公式记忆法：若将上述两种类型的角归纳为$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$（$k\in\mathbf{Z}$），则诱导公式可概括为“奇变偶不变，符号看象限”．“变”与“不变”是相对处于互余关系的函数而言的，$\sin\alpha$与$\cos\alpha$互余、$\tan\alpha$与$\cot\alpha$互余．“奇”、“偶”是对诱导公式$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$中的整数$k$来讲的．“象限”指$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$（$k\in\mathbf{Z}$）中，将$\alpha$看作锐角时，$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$（$k\in\mathbf{Z}$）所在的象限，再根据“一正二正弦三切四余弦”（第一象限所有三角函数都是正的；第二象限正弦是正的；第三象限正切、余切是正的；第四象限余弦是正的，其他都是负的）确定原函数值符号．如将$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$写成$\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，因为3是奇数，则“cos”变为余函数符号“sin”，又将α看作第一象限角时，$\frac{3\pi}{2}+\alpha$是第四象限角，$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$符号为“+”，故有$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$，同理$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$．

2．诱导公式的应用——求值、化简、证明

例1　求$\sin(-525°)$的值．

分析　求任意角的三角函数值的步骤：利用诱导公式先负角化正角；大于360°的角化为0°～360°之间的角；0°～360°之间的角化为0°～90°之间的角．

解　$\sin(-525°)=-\sin 525°=-\sin(360°+165°)=-\sin 165°$

$$=-\sin(90°+75°)=-\cos 75°=-\cos(30°+45°)$$

$$=-(\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

例 2 设 $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=m$，求 $\frac{\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}$ 的值.

分析 利用诱导公式将条件等式和欲求式都化到 α 的同名三角函数上去，再利用同角三角函数基本关系式求解.

解
$$\frac{\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}=\frac{\sin(-4\pi+\pi+\alpha)-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}$$
$$=\frac{\sin(\pi+\alpha)-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}.$$

又 $\because \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=m$，$\therefore \tan\alpha=-m$.

故原式 $=\frac{-m+1}{-m-1}=\frac{m-1}{m+1}$.

3.3　三角函数的图象与性质

3.3.1　正弦函数、余弦函数的图象与性质

教材线索

本节首先利用正弦线画出 $y=\sin x$ 的图象，通过平移得到 $y=\cos x$ 的图象，再根椐图象观察得出正弦、余弦函数的性质，最后简单点明奇、偶函数的定义.

教学目标

1. 了解如何用正弦线画出正弦函数的图象，并在此基础上由诱导公式画出余弦函数的图象.

2. 通过正弦曲线、余弦曲线了解正弦函数、余弦函数的性质.

3. 会用五点法画正弦函数、余弦函数的简图.

教材分析

1. 重点：正弦函数、余弦函数的图象形状及其主要性质.

2. 难点：利用正弦线画出函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象；利用正弦曲线和诱导公式画出余弦曲线.

3. 三角函数的性质

(1) 三角函数的性质是通过对三角函数图象的观察分析得出的，即所谓“观图取性”. 学习时要认真品味这种数形结合的方法. 例如，曲线 $y=\sin x$ 被夹在两条平行线 $y=\pm 1$ 之间并和这两条平行线“相切”，可得出函数 $y=\sin x$ 的值域为 $[-1,1]$；由曲线关于原点对称可得出 $y=\sin x$ 是奇函数，由曲线 $y=\sin x$ 的升降得出 $y=\sin x$ 的单调区间等.

(2) 函数的奇偶性是针对函数的整个定义域而言，因此奇偶性是函数在定义域上的整体性质. 由于任意的 x 和 $-x$ 均要在定义域内，故奇函数或偶函数的定义域一定关于原点对称，所以我们在判定函数的奇偶性时，首先要确定函数的定义域（函数的定义域关于原点对称是函数有奇偶性的必要条件，如果其定义域关于原点不对称，那么它没有奇偶性），然后再判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系，从而确定其奇偶性.

函数的图象能够直观地反映函数的奇偶性，$f(x)$为奇函数的充要条件是函数 $f(x)$的图象关于原点对称，$f(x)$为偶函数的充要条件是函数 $f(x)$的图象关于 y 轴对称.

（3）三角函数图象和性质的应用

①应用三角函数的图象可以解最简单的三角不等式.

②应用三角函数的性质可以求一些与三角函数有关的函数的定义域.

③利用$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$ 可以解有关的值域、最值、取值范围等.

④利用三角函数的单调性，可以比较三角函数值的大小，这时应注意将三角函数化为同名函数，角用同一单位制表示，并将角化入相应函数的单调区间.

教学建议

1. 在讲如何画 $y=\sin x$，$x\in[0，2\pi]$ 的图象之前，可以指出，画这类函数的图象一般有两种方法：一是描点法，二是利用正弦线来画的几何法. 前者所取各点的纵坐标都是利用计算器等工具得来的，不易描出对应点的准确位置，所以画出的图象不够准确；后者虽然比较准确，但画图较难. 学生过去已学过用描点法画函数图象，现在画函数 $y=\sin x$，$x\in[0，2\pi]$ 的图象时，先介绍利用正弦线来画的几何法.

2. 为了画出三角函数的图象，三角函数的自变量常用弧度制来表示，使自变量表示到 x 轴上时，其单位长度易于与表示函数值的 y 轴上的单位长度一致，这样做有利于不同的学生都能画出形状基本相同的曲线，从而对曲线建立起正确的认识. 教学时，教师应边讲解边画图，也可以利用计算机画图演示，力求准确，以起到示范作用.

3. 在教学时应适当教给学生“五点法”的作图方法，并要求学生熟练掌握.

例题解析

例　（教材 P. 33，例 2）不通过求值，判断下列各式的值是正数还是负数.

（1）$\sin(-1)-\sin(-1.1)$；　　（2）$\cos\dfrac{11\pi}{7}-\cos\dfrac{12\pi}{7}$.

说明　此题是利用三角函数的单调性比较两个三角函数值的大小. 解决这类问题的关键是利用诱导公式等将它们转化到同一单调区间上研究. 在此要提醒学生，解决问题时要注意前后知识的联系.

相关链接

三角函数表

三角函数表包括正弦、余弦、正切和余切函数表.

希腊天文学家托勒密（85—165 年）在他的《天文集》中包括了从 0°到 90°的每隔半度的弦表，其作用相当于从 0°到 90°的每隔（1/4)°的正弦函数表．印度阿利耶毗陀（476—550 年）制作了一个正弦表，是按古巴比伦和希腊人的习惯而定的．他把圆周分成 360°，每度分成 60 份，整个圆周为 21 600 份，根据 $2\pi r=21\,6000$，得出 $r=3\,438$（近似值），然后用勾股定理先算出 30°、45°、90°的正弦之后，再用半角公式算出较小角的正弦值，从而获得每隔 3°45′的正弦值表．公元 920 年左右，阿尔·巴坦尼（850—929 年）制作出从 0°到 90°相隔 1°的余切表，阿布尔·威发（940—998 年，今伊朗东北部人）计算出每隔 10′的正弦表和正切表．

14 世纪中叶，中亚细亚的兀鲁伯（1393—1449 年），原是成吉思汗的后裔，他组织了大规模的天文观测和数学用表的计算．他的正弦表精确到小数 9 位．他还制作了 30°到 45°之间相隔为 1′，45°到 90°之间相隔为 5′的正切表．

欧洲的文艺复兴时期（14—16 世纪），伟大的天文学家哥白尼（1473—1543 年）提倡地动学说，他的学生利提克斯（1514—1576 年）看到当时天文观测日益精密，认为推算更精确的三角函数值表刻不容缓．于是他定圆的半径为 10^{15}，以制作每隔 10′的正弦、正切及正割值表．当时还没有对数，更没有计算器，全靠笔算，任务十分繁重．利提克斯和他的助手们以坚韧不拔的意志，勤奋工作达 12 年之久．遗憾的是，他生前没能完成这项工作，直到 1596 年，才由他的学生鄂图（1550—1605 年）完成并公布于世．1613 年海得堡的彼提克斯（1561—1613 年）又不辞劳苦地修订了利提克斯的三角函数表，重新再版．后来英国数学家纳皮尔（1550—1617 年）发现了对数，这就大大简化了三角计算，为进一步制作出更精确的三角函数表创造了条件．

3.3.2 正切函数的图象与性质

教材线索

本节首先由正切线画出正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象，再得出正切曲线，然后观察正切曲线得出正切函数的性质．

教学目标

1. 理解并掌握作正切函数图象的方法．
2. 理解并掌握用正切函数的图象，解简单三角不等式的方法．

教材分析

1. 重点：正切函数的图象形状及其主要性质.

2. 难点：利用正切线画出函数 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$的图象.

3. 由于正切函数的定义域为$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$，所以它的图象被 $x=\pm\frac{\pi}{2}$，$x=\pm\frac{3\pi}{2}$，…这些垂直于 x 轴的直线隔开，图象的两端连续地无限接近这些平行线.

4. 正切函数在每个单调区间$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）内都是增函数，并且单调区间是升区间，但不能简单地称正切函数为增函数，因此，有关性质的叙述要注意严谨.

教学建议

根据正切函数的图象特征，牢记其简图，解含有正切的不等式时，借助正切函数的简图，数形结合既直观又不易出错.

例题解析

例　（教材 P.35，例）不通过求值，确定下列各式的值的符号：

（1）$\tan(-3)-\tan(-3.1)$；　　（2）$\tan\frac{7\pi}{6}-\tan\frac{7\pi}{5}$.

说明　比较三角函数值大小的一般步骤是：

（1）先判断正负；

（2）自变量不在同一单调区间的化为同一单调区间.

相关链接

用几何画板巧作一段正切曲线

首先启用几何画板软件（如果你的电脑上没有安装该软件，可以到网上免费下载），该画法分六步：

第一步：在“绘图”菜单中选择“绘制点”选项，绘制出点 $C(-1.57,\ 0)$、$D(1.57,\ 0)$、$E(-2.57,\ 0)$. 同时选点 C、y 轴（按住 Shift 键，下同），在“构造”菜单中选择“平行线”选项，作过点 C 平行于 y 轴的直线 j，同理可作出过 D 点且平行于 y 轴的直线 k.

第二步：选择点 E、点 C，在“构造”菜单中选择“以圆心和圆周上的点作圆”选项，作出以点 E 为圆心，线段 CE 为半径的圆，过 E 点作出平行于 y 轴的直线，在“构造”菜单

中选择“交点”选项，作出与圆的交点 G、F，选择 G、C、F 三点，在“构造”菜单中选择“过三点的弧”选项，做出过点 G、C、F 三点的半圆.

第三步：选择“点”工具，在半圆上作出一个点 H，按照 C、E、H 的顺序依次选择三个点，在“度量”菜单中选择“角度”选项，得出$\angle CEH$ 的大小，在“编辑”菜单中选择“参数选项”，在对话框中把“度”改为“弧度”，得到$\angle CEH$ 的度量值，在“绘图”菜单中选择“在轴上绘制点”选项，绘制点 A，过点 A 作 x 轴的垂线 n.

第四步：作出直线 EH，作出直线 EH 和直线 j 的交点 I，隐藏直线 EH，过点 I 作直线 n 的垂线 s，作出 s 和 n 的交点 J，隐藏垂线 s，选择 J 点，打开“显示”菜单选择“追踪交点”选项. 当点 H 在半圆上运动时，点 J 的轨迹就是正切图象.

第五步：选择 H 点和半圆，打开“编辑”菜单，选择“操作类按钮”选项，在下拉菜单中选择“动画”选项，在弹出的对话框中，根据情况选择你所需要的动画，双击“动画”图标，点 H 就自动地绕着半圆运动，此时点 J 的轨迹就是正切函数 $y=\tan x$ 的一段图象.

第六步：同时选择点 H 和点 J，在“构造”菜单中选择“轨迹”选项，正切图象就出现了，选择正切图象，在“编辑”菜单中选择“操作类按钮”，在下拉菜单中选择“隐藏/显示”，就可以根据你的需要显示或隐藏正切图象.

同学们赶快动手试试吧，一定会使你兴奋不已.

3.4 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质

3.4.1 三角函数的周期性

教材线索

本节首先讲周期函数及周期的概念，然后根据概念得出正弦、余弦函数都是周期函数，接着再讲最小正周期的定义，最后说明正切函数也是周期函数.

教学目标

1. 理解周期函数与（最小正）周期的意义，并通过图象了解正弦、余弦、正切函数的周期性.

2. 正弦函数、余弦函数、正切函数的周期的求法.

教材分析

1. 重点：理解周期函数与（最小正）周期的定义，掌握正弦函数、余弦函数、正切函数的周期性.

2. 难点：周期函数与（最小正）周期的意义.

3. 周期函数是学习中的一个难点，要弄清以下几点：周期函数与周期的定义中，必须注意“每一个值”这四个字，例如对于函数 $f(x)=x^2$，尽管有 $f(-1+2)=f(-1)$，但不能说 $f(x)=x^2$ 是以 2 为周期的函数；不是只有三角函数才是周期函数，例如 $f(x)=C$（常数）就是一个最简单的周期函数；不是所有的周期函数都有最小正周期，周期函数 $f(x)=C$ 就没有最小正周期.

运用函数的周期性可以简化对函数的研究，画出周期函数在一个周期的图象，再把这个图象向左、右平移 $|T|$，$2|T|$，$3|T|$，…个单位，就可以得出图象的全部；求出周期函数在一个周期内的单调递增区间 (a,b)，就可以得出它的全部单调递增区间 $(nT+a, nT+b)$.

教学建议

关于正弦、余弦函数的周期与最小正周期，一般只要讲清定义，并根据正弦、余弦曲线

观察图象就可以了. 对于学有余力的学生，给他们证明正弦函数的最小正周期是 2π，可以训练对反证法的应用；余弦函数的最小正周期是 2π 则可作为练习.

例题解析

例 1 用定义求下列函数的周期：

(1) $y=3\sin x$；　(2) $y=\cos 2x$；　(3) $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

解 (1) 2π.

(2) π.

(3) $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[\frac{1}{2}(x+4\pi)-\frac{\pi}{6}\right]$,

由周期函数的定义得 $T=4\pi$.

例 2 求下列函数的周期：

(1) $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；　(2) $y=|\sin x|$.

解 (1) 由公式得 $T=\pi$.

(2) 用图象得 $T=\pi$.

说明 在例题的教学中，关键要让学生认识到，在 $f(x+T)=f(x)$中，T 是相对于自变量 x 而言的. 如果要求的是"最小正周期"，那就要多加小心. 例如，例 1 的第(2)小题，虽然 $f(x)=\cos 2x=\cos(2x+2\pi)$，但它的最小正周期并不是 2π. 实际上，还须进一步变形为 $\cos(2x+2\pi)=\cos 2(x+\pi)=f(x+\pi)$，即 $f(x)$中的 x 以 $x+\pi$ 代替后，函数值不变，从而 $\cos 2x$ 的最小正周期是 π.

对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，可以按照如下的方法求它的周期：

$y=A\sin(\omega x+\varphi+2\pi)=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=A\sin(\omega x+\varphi)$,

于是有 $f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=f(x)$，所以其周期是$\frac{2\pi}{\omega}$.

例 2 中的第(2)小题可通过画图得解，体现了数形结合的思想.

相关链接

600 多年葡萄收成揭示：全球变暖是周期性的？

当你看到鲜美的葡萄时，你想到了什么？葡萄干或者红酒. 你有没有想到气候？最近，法国研究人员在英国出版的《自然》杂志上发表文章称，他们通过研究历史上 600 多年的葡萄收成数据，发现了气候的变化规律. 研究发现，全球变暖是一种周期性气候变化的结果，

近年来气温的升高可能与工业社会中的人类活动没有太大的关系.

为了庆贺葡萄的收成，世界著名的红酒之乡勃艮第从 14 世纪下半叶就开始形成了一个记载葡萄收成的习惯，当地政府逐年不间断地记载了 600 多年的相关数据. 由于葡萄的收成与温度有关，葡萄收获的时间越早，收成越好，说明当年夏天的气温越高，当年的平均气温也高；反之，则说明当年的平均气温较低. 因此，考证这些葡萄收成的数据就可以获得当地气候变化的资料.

法国一些气象学家和生态学家组成了研究小组，查阅了从 1370 年到 1989 以来所有现存的报纸和其他与葡萄收成有关的历史档案，企图研究葡萄收成与气候变化之间的关系，并希望能找到导致全球变暖的线索. 研究人员根据葡萄收成的资料，绘制出了以前各年份的温度变化图. 本来是想看看温室效应的发展趋势，结果却有了一个意外的发现：近年来的气温升高可能与工业社会中的人类活动没有关系.

气象学研究表明，20 世纪 90 年代以来，全球的平均气温开始大幅度上升，并且出现了不少极端灾难性气候，导致了飓风、洪灾和旱灾的出现. 但是，葡萄收成的资料却表明，勃艮第在 1990 年和 1380 年、1420 年、1520 年一样热. 在 20 世纪里，勃艮第地区的气温升高从 1960 年开始一直延续到现在. 于是，有人怀疑这种炎热会随着人类排放温室气体的增加而持续不断地进行下去. 然而，从 1630 年到 1680 年，勃艮第地区也连续热了半个世纪，其炎热程度和 1990 年类似. 而从 1680 年到 1970 年间，夏季则较为凉爽.

在 2003 年，法国热得出奇，有 1 万名居民死于炎热. 在气象学上，年均温度高出某一历史时期平均温度 1 摄氏度就是很大的气象变化了，然而，2003 年测得的勃艮第地区的平均气温比历史平均气温高出 5.86 ℃. 不过，研究人员发现历史上也出现过类似的情况，1523 年的平均气温比历史平均气温高出 4.1 ℃.

通过研究葡萄收成的历史资料，科学家们绘制出了从 1370 年至 2003 年间的气候变化图谱，其计算出的夏季气温的精确度据说可以达到 0.01 度. 根据这些研究结果，参与这次研究的研究人员蒙彼利埃、进化与生态研究中心的伊莎贝尔·丘恩认为，全球性的气候变化会在一定的历史时期内有所起伏，地球升温是一种不定期出现的自然现象；2003 年的反常炎热气候是历史发展中的一种正常现象，全球周期性的气候变化大趋势可能会导致地球在接下来的几十年内降温.

丘恩还认为，近年来，地球排放的污染物虽然阻止了地球热量的散发，但同时，地球污染物也阻止了更多太阳光进入地球，太阳释放到地球的热量减少了. 两者相互削弱，污染物对地球温度变化的作用就大大减小了. 因此，地球气候变化的原因还得从地球自身的运动方面去寻找.

3.4.2 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质

教材线索

本节主要是通过培养学生的观察和分析能力，归纳出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的变换规律.

教学目标

1. 掌握由 $y=\sin x$ 到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换过程.
2. 明确函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的物理意义.
3. 掌握用“五点法”作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

教材分析

1. 重点：培养学生的观察和分析能力，从振幅变换、周期变换、相位变换中选用不同顺序的变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

2. 难点：理解上述三种变换的规律.

3. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$与 $y=\sin x$ 的图象间的关系.

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象可以由 $y=\sin x$ 的图象经过振幅变换、周期变换、相位变换得到，这三种变换可以变换顺序，如：

$y=\sin x\to y=\sin(x+\varphi)\to y=\sin(\omega x+\varphi)\to y=A\sin(\omega x+\varphi)$

$y=\sin x\to y=\sin \omega x\to y=\sin(\omega x+\varphi)\to y=A\sin(\omega x+\varphi)$

后一变换过程反映了图象实质上的平移程度，需要注意的是，前一变换中 $y=\sin x\to y=\sin(x+\varphi)$，图象向左或右平移了 $|\varphi|$ 个单位，而后一变换中 $y=\sin \omega x\to y=A\sin(\omega x+\varphi)$，图象向左或右平移了 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位.

4. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象特点和主要性质：

(1) $y=A\sin(\omega x+\varphi)$是周期函数，$T=\frac{2\pi}{\omega}$.

(2) 当 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 时，y 有最大值 A；当 $\omega x+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 时，y 有最小值 $-A$.

(3) 当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\omega x+\varphi<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 时，函数是单调递增的；当 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\omega x+\varphi<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 时，函数是单调递减的.

（4）图象是轴对称图形，有无数对称轴，它们都与 x 轴垂直且通过图象的最高或最低点，对称轴方程为 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）.

图象是中心对称图形，有无数对称中心，它们是 x 轴上函数值为 0 的点，对称中心是（x_0，0），其中 x_0 是方程 $\omega x+\varphi=k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）的解.

教学建议

教材上并未告知 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的简图如何画出，建议上课时不妨先讲如何画函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的简图．在每道例题中讲解图象变化的目的在于揭示函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与正弦曲线的关系，而不是要求按图象变化规律来画图．从教学上说，这里所谓的变化规律，都可以用平移变换或伸缩变换来描述，但考虑到高中一年级学生的接受能力以及本节的教学目的，教材未采用“平移变换”和“伸缩变换”等词，而分别用“向左（或向右、上、下）平行移动”和“伸长（或缩短）”等日常词语来代替，教学中最好也这样做，以免喧宾夺主．本节课能充分体现数形结合的思想，要求学生通过观察图象变化的趋势得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与正弦曲线的关系.

例题解析

例 1　填空题.

（1）由 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上各点向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位，得到函数 $y=$____________的图象；再将所得函数图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，得到函数 $y=$____________的图象.

（2）将 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象上各点的横坐标伸长到原来的 3 倍，得到函数 $y=$____________的图象；若将 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象上各点向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数 $y=$____________的图象.

解　（1）$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，$y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

（2）$y=\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$，$y=\sin 2x$.

例 2　函数 $f(x)$的横坐标伸长到原来的2倍，再向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位，所得到的曲线是 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象，试求函数 $f(x)$的解析式.

解　将 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象先向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位，得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，再将横坐标压缩为原来的$\frac{1}{2}$，得 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $y=-\frac{1}{2}\cos 2x$，这就是所求函数 $f(x)$的解析式.

说明 在用图象作图时，提倡先平移后伸缩，但先伸缩后平移也经常出现在题目中，所以也必须熟练掌握．无论是哪种变形，请切记每一个变换总是对字母而言，即图象变换要看“变量”起多大变化，而不是“角变化”多少．

例 3 图 3－1 所示的是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的简图，求这个函数的表达式．

解 $\because T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，

$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=2$．

$\because x_1=-\frac{\pi}{6}$，由 $\omega x_1+\varphi=0$ 得

$2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=0$．

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$．

又 $A=2$，

故所求函数为 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$．

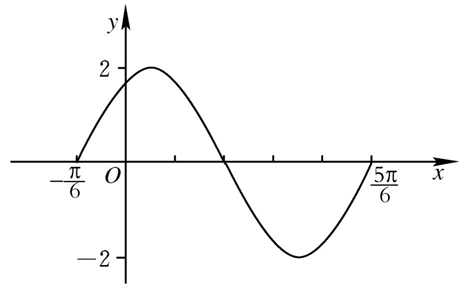

图 3－1

说明 给出图象确定解析式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的题型，有时从寻找“五点法”中的第一零点$\left(-\frac{\varphi}{\omega}，0\right)$作为突破口，要从图象的升降情况找准第一零点的位置．通过这道题再次体会数形结合的思想在本章中的运用．

相关链接

乐音与音阶

我们生活的世界充满了各种声音．优美动听的音乐可以陶冶情操，给人以美的享受，而电锯锯木的声音、小刀刮玻璃的声音使人感到刺耳难听．可见，声音可以分为两种：前一种悦耳动听的声音叫作乐音，后一种令人厌烦的声音叫作噪声．那么，从物理学的角度看，乐音和噪声的差别是什么呢？

把话筒接在示波器的输入端，再把发声体放在话筒前，在示波器的荧光屏上可以显示出发声体的振动图象．

先用两种乐器在话筒前演奏，观察它们发声时的振动图象；再用小刀在话筒前刮玻璃，观察这种声音的振动图象．如图 3－2．

从示波器上可以看出，乐音的振动虽然不一定按正弦规律变化，但仍是有规则的，振动

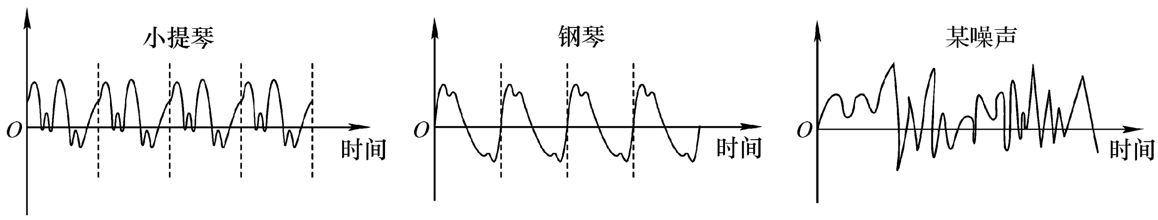

图 3－2

的周期是一定的；而噪声的振动没有规则，没有确定的周期.

既然乐音具有确定的周期和频率，那么一种乐音的音调就是确定的. 在音乐理论中，把一组音按音调高低的次序排列起来就成为音阶，也就是大家都知道的 do，re，mi，fa，sol，la，si，do（简谱记作“1”“2”“3”“4”“5”“6”“7”，“$\dot{1}$”）. 下表列出了 C 调音阶和 D 调音阶中各音的频率.

唱名	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
该唱名的频率与 do 的频率之比	1∶1	9∶8	5∶4	4∶3	3∶2	5∶3	15∶8	2∶1
f/Hz（C 调）	264	297	330	352	396	440	495	528
f/Hz（D 调）	297	334	371	396	446	495	557	594

有趣的是，高音 do 的频率正好是中音 do 的频率的 2 倍，而且音阶中各音的频率跟 do 的频率之比都是整数比.

还有更有趣的事情. 喜欢音乐的同学都知道，有些音一起演奏时听起来好听，有些音一起演奏时听起来不好听；前者叫作谐和音，后者叫作不谐和音. 著名的大三和弦 do、mi、sol 的频率比是 4∶5∶6；而小三和弦 re、fa、la 的频率比是 10∶12∶15. 大三和弦听起来更为谐和，那是因为三个音的频率比是更小的整数之比. 随便拼凑在一起的三个音听起来不和谐，有兴趣的同学可以算一算它们的频率比，一定是三个大得惊人的整数.

从这个例子可以看到艺术后面的科学道理，但是，艺术远比 1＋1＝2 复杂. 从上表中看出，频率增加 1 倍，音高出 8 度. 实际上这只对于中等音高是正确的. 人的感觉十分复杂，对于高音段来说，频率要增加一倍多，听起来音高才高出一个 8 度. 如果一个书呆子调琴师按照“频率翻倍”的办法调钢琴，那他就要砸饭碗了.

尽管如此，科学家们还是可以通过音乐家的实际测听，确定音高和频率的对应关系，并且据此设计出有着优美动听的声音的电子乐器.

3.4.3 应用举例

例题解析

例 教材 P.48，例 2

说明 恰当选择函数模型是解决问题的关键，而对问题作出合理的数学解释，进而把实际问题转化为数学问题是需要培养的能力. 如果学生中选择了不同的函数模型，教师应组织学生进行交流，或让学生根据自己选择的模型进行求解，然后再根据所求结果与实际情况的差异进行评价. 本题的解答中可以使用信息技术的地方较多，例如，作散点图；已知正弦函数值，求角；观察港口水深与货船安全水深函数的变化规律等. 教学时应积极引导学生利用信息技术处理画图、求函数值、利用计算机的动态演示功能观察函数变化情况等，以使他们有更多的时间理解问题的本质. 需要说明的是，建立数学模型解决实际问题，所得的模型是近似的，并且得到的解也是近似的. 这就需要根据实际背景对问题的解进行具体分析. 本题的解答中，给出货船的进出港时间，一方面要注意利用周期性以及问题的条件，另一方面还要注意考虑实际意义.

相关链接

三角函数的实际应用举例

三角函数应用题通常涉及生产、生活、军事、天文、地理和物理等实际问题，其解答流程大致是：审读题意→设角建立三角式→进行三角变换→解决实际问题. 本文列举几个具体例子，供读者参考.

一、生活中的三角建模问题

例 1 某商品一年内出厂价格在 10 元的基础上按月份随正弦曲线波动，已知 3 月份价格最高为 12 元，7 月份价格最低为 8 元. 该商品在商店内的销售价格在 14 元基础上按月份随正弦曲线波动，5 月份销售价格最高为 18 元，9 月份销售价格最低为 10 元. 假设商店每月购进这种商品 m 件，且当月售完，你估计哪个月份盈利最多？

分析 由题意可知，该问题中存在着正弦函数关系，可通过设变量，找出变量间的正弦函数关系进行求解.

解 设月份为 x，则由题意可知：出厂价格函数为 $y=A\sin(\omega_1 x+\varphi_1)+10$，当 $x=3$

时，$y_{\max}=12$；当 $x=7$ 时，$y_{\min}=8$. 可解得：$A=2$，$\omega_1=\frac{\pi}{4}$，$\varphi_1=-\frac{\pi}{4}$.

所以，出厂价格函数为：$y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+10$.

设销售价格函数为 $y=B\sin(\omega_2 x+\varphi_2)+14$，当 $x=5$ 时，$y_{\max}=18$；当 $x=9$ 时，$y_{\min}=10$. 可解得：$B=4$，$\omega_2=\frac{\pi}{4}$，$\varphi_2=-\frac{3\pi}{4}$.

从而销售价格函数为：$y=4\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4}\right)+14$.

当进货数量为 m 件时，利润＝进货数量×(销售价格－出厂价格)，从而利润为

$$P=\left[4\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4}\right)+14-2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)-10\right]\times m$$

$$=\left[\left(-3\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x\right)+4\right]\times m$$

$$=\left[4-2\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)\right]\times m\text{，其中 }\tan\varphi=\frac{1}{3}.$$

由上可推出 $x\in(5,6)$.

当 $x=5$ 时，$P_1=14m$；当 $x=6$ 时，$P_2=(10+4\sqrt{2})m$，$P_2>P_1$，故 6 月份盈利最多.

二、物理中的三角函数问题

例 2 单摆从某点开始来回摆动，离开平移位置 O 的距离和时间的函数关系式为 $s=6\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$，那么单摆来回摆动一次所需时间是多少？

解 来回摆动一次正好是一个周期，故 $T=\frac{2\pi}{2\pi}=1(\text{s})$.

三、三角换元法的应用

例 3 已知 x，$y\in\mathbf{R}_+$，且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，求 $x+y$ 的最小值.

解 ∵ x，$y\in\mathbf{R}_+$，且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，

∴可令 $\frac{1}{x}=\cos^2\alpha$，$\frac{9}{y}=\sin^2\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

∴ $x+y=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{9}{\sin^2\alpha}=10+\left(\tan^2\alpha+\frac{9}{\tan^2\alpha}\right)\geqslant 10+6=16$.

当且仅当 $\tan^2\alpha=\frac{9}{\tan^2\alpha}$ 即 $\tan^2\alpha=3$ 时等号成立.

说明 三角换元法是一种应用十分广泛的方法，有关平方和的等式（或方程），有关平方差的等式或方程，有关正数的和差的式子等均可考虑三角换元.

四、三角形中的三角函数问题

例 4 在 Rt△ABC 内有一内接正方形，它的一条边在斜边 BC 上，如图 3－3 所示.

(1) 设 $AB=a$，$\angle ABC=\theta$，求$\triangle ABC$ 的面积 P 与正方形面积 Q；

(2) 当 θ 变化时求 $\dfrac{P}{Q}$ 的最小值.

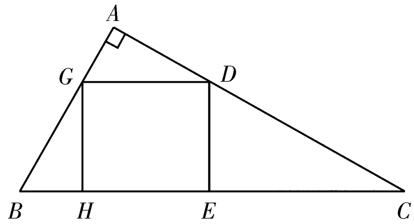

图 3－3

解 (1) $P=\dfrac{1}{2}a\cdot a\tan\theta=\dfrac{a^2}{2}\tan\theta$.

设 $GH=x$，$\therefore \dfrac{x}{\sin\theta}+x\cos\theta=a$.

$\therefore x=\dfrac{a\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta+1}$.

$\therefore Q=x^2=\dfrac{a^2\sin^2\theta}{(\cos\theta\sin\theta+1)^2}$.

(2) $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{(\cos\theta\sin\theta+1)^2}{a^2\sin^2\theta}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+1\right)^2}{\sin 2\theta}$

$=\dfrac{1}{4}\sin 2\theta+\dfrac{1}{\sin 2\theta}+1$.

$\because \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2\theta\in(0,\pi)$，$\therefore \sin 2\theta\in(0,1]$. $\therefore \dfrac{P}{Q}\geqslant\dfrac{9}{4}$.

即$\dfrac{P}{Q}$的最小值为$\dfrac{9}{4}$.

五、测量中的三角函数

例 5 如图 3－4，塔 AB 和楼 CD 的水平距离为 80 m，从楼顶 C 处及楼底 D 处测得塔顶 A 的仰角分别为 45°和 60°，试求塔高与楼高（精确到 0.01 m）.

分析 此题可先通过解 Rt$\triangle ABD$ 求出塔高 AB，再利用 $CE=BD=80$ m，解 Rt$\triangle AEC$，求出 AE，最后求出 $CD=BE=AB-AE$.

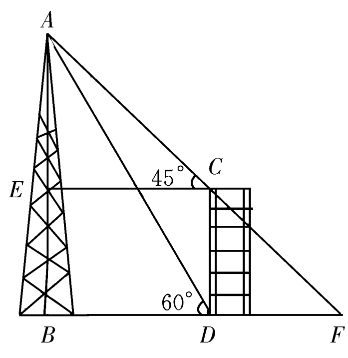

图 3－4

解 在 Rt$\triangle ABD$ 中，$BD=80$ m，$\angle BDA=60°$，

$\therefore AB=BD\cdot\tan 60°=80\sqrt{3}\approx 138.56$(m).

在 Rt$\triangle AEC$ 中，$EC=BD=80$ m，$\angle ACE=45°$，

$\therefore AE=CE=80$ m.

$\therefore CD=BE=AB-AE=80\sqrt{3}-80\approx 58.56$(m).

答：塔 AB 的高约为 138.56 m，楼 CD 的高约为 58.56 m.

习题参考解答

3.1.1 练习（教材 P.7）

1. 错. 第一象限角的范围是“$k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$”，而锐角指的是“$0^\circ<\alpha<90^\circ$”.
2. 作图略.（1）第一象限；（2）第二象限；（3）第三象限；（4）第一象限；
（5）第四象限；（6）第四象限；（7）第二象限；（8）第二象限.
3. （1）30°；（2）120°；（3）240°；（4）60°；（5）330°；（6）315°；（7）150°；（8）140°.

3.1.2 练习（教材 P.10）

1. （1）π；（2）$\frac{\pi}{2}$；（3）；$\frac{\pi}{3}$ （4）$\frac{\pi}{4}$；（5）$\frac{2\pi}{3}$；（6）$\frac{\pi}{6}$；（7）$\frac{3\pi}{2}$；（8）2π.

2.

角度		30°			75°	90°				270°	57°18′	114°36′	171°54′
弧度	$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$			$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$				

3. （1）第二象限；（2）第三象限；（3）第四象限；（4）第二象限.

习题 1（教材 P.11）

1. 960，三.
2. （1）310°；（2）120°；（3）225°；（4）180°.
3. $\{x\mid x=k\cdot 360^\circ+180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.
4. （1）$\frac{17\pi}{3}=4\pi+\frac{5\pi}{3}$，第四象限；（2）$\frac{17\pi}{4}=4\pi+\frac{\pi}{4}$，第一象限；
（3）$-\frac{17\pi}{6}=-4\pi+\frac{7\pi}{6}$，第三象限；（4）$-\frac{9\pi}{5}=-2\pi+\frac{\pi}{5}$，第一象限.
5. $\frac{2\pi}{15}$，$\frac{4\pi}{15}$，$\frac{2\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{15}$，$\frac{2\pi}{3}$.
6. （1）$\frac{40\pi}{3}$；（2）$\frac{200\pi}{3}$.

3.2.1 练习（教材 P.16）

1. $-\frac{5}{13}$，$-\frac{12}{13}$，$\frac{5}{12}$.

2. （1）-1，0，不存在；（2）0，-1，0；（3）$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1；（4）$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，-1.

3.2.1 练习（教材 P.19）

1. 作图略.
2. （1）负；（2）负；（3）正；（4）负.

3.2.2 练习（教材 P.22）

1. $-\frac{3}{5}$，$-\frac{3}{4}$.

2. 当 α 在第二象限时，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$；

   当 α 在第三象限时，$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

3. 当 α 在第一象限时，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$；

   当 α 在第三象限时，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

4. $-\frac{5}{12}$.

3.2.3 练习（教材 P.28）

1. （1）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$；（3）1.
2. $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$；$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$；
   $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$；$\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$.
3. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$；$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$；
   $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$；$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$.
4. （1）$-\cos\alpha$；（2）$-\sin\alpha$.

习题 2（教材 P.28）

1. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

2. 当 $\alpha>0$ 时，$\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\alpha=1$；

   当 $\alpha<0$ 时，$\sin\alpha=\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\alpha=1$.

3. (1) 0，1，0；(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，-1；(3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，1.

4. 作图略.

5. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$；(2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$；(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. (1) $\frac{1}{2}$；(2) $-\frac{1}{2}$.

8. (1) 负；(2) 正.

9. $m=8$.

10. $m=-\frac{12}{25}$.

11. (1) 3；(2) $\frac{2}{3}$.

12. 0.

13. $\frac{1}{2}$.

14. (1) $-\frac{1}{2}$；(2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. $\cos^2\alpha$.

16. (1) 不成立，$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$；

(2) 成立，$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$；

(3) 不成立，$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$；

(4) 成立，$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$.

3.3.1 练习（教材 P.32）

作图略.

3.3.1 练习（教材 P.34）

(1) 正；(2) 负；(3) 负；(4) 正.

3.3.2 练习（教材 P.36）

(1) 正；(2) 正；(3) 负.

习题 3（教材 P. 36）

1. 作图略，$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. 2 个.

3. （1）$\sin\frac{7\pi}{6}>\sin\frac{5\pi}{4}>\sin 4$；（2）$\cos 1>\cos 2>\cos 3$.

4. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

5. （1）$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$；（2）$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

6. （1）$\tan(-1)<\tan\frac{1}{2}$；（2）$\tan\frac{\pi}{5}<\sqrt{3}<\tan\frac{5\pi}{12}$.

3. 4. 1 练习（教材 P. 39）

（1）2π；（2）2π；（3）π.

3. 4. 2 练习（教材 P. 42）

1. （1）作图略. $y=3\sin x$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标不变、纵坐标乘以 3 得到的；$y=\frac{1}{3}\sin x$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标不变、纵坐标乘以 $\frac{1}{3}$ 得到的.

（2）作图略. $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变、横坐标除以 $\frac{1}{2}$ 得到的；$y=\sin 2x$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变、横坐标除以 2 得到的.

2. （1）值域 $[-4, 4]$，周期 2π；（2）值域 $[-1, 1]$，周期 8π；
（3）值域 $[-2, 2]$，周期 π.

3. 4. 2 练习（教材 P. 45）

1. （1）作图略. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变、横坐标加上 $\frac{\pi}{3}$ 得到的，也就是将 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到的.

（2）作图略. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到的.

2. （1）振幅为 3，周期为 4π，初相为 $\frac{\pi}{5}$；$y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象向

左平移$\frac{\pi}{5}$个单位长度，再将所得图象上每一点的横坐标伸长为原来的 2 倍，进一步将所得图象上每一点的纵坐标扩大为原来的 3 倍.

（2）振幅为$\frac{1}{3}$，周期为$\frac{2}{3}$，初相为$-\frac{\pi}{6}$；$y=\frac{1}{3}\sin\left(3\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象是由 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再将所得图象上每一点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{3\pi}$倍，进一步将所得图象上每一点的纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{3}$倍.

3. 作图略.

习题 4（教材 P. 52）

1. （1）2π，$[-4, 4]$；（2）2π，$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$；（3）$\pi$，$[-1, 1]$；

（4）2，$[-1, 1]$；（5）π，$(-\infty, +\infty)$；（6）$\frac{\pi}{2}$，$(-\infty, +\infty)$.

2. （1）作图略. $y=\frac{2}{3}\sin x$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标缩短为原来的$\frac{2}{3}$倍得到的，周期 2π，值域$\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

（2）作图略. $y=4\sin x$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标伸长为原来的 4 倍得到的，周期 2π，值域 $[-4, 4]$.

（3）作图略. $y=\sin\frac{2}{3}x$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标伸长为原来的$\frac{3}{2}$倍得到的，周期 3π，值域 $[-1, 1]$.

（4）作图略. $y=\sin 4x$ 的图象是由 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{4}$倍得到的，周期$\frac{\pi}{2}$，值域 $[-1, 1]$.

（5）作图略. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象是由 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到的，周期 2π，值域 $[-1, 1]$.

（6）作图略. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象是由 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到的，周期 2π，值域 $[-1, 1]$.

（7）作图略. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象是由 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再将所得图象上每一点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，进一步将所得图象上每一点的纵坐标扩大为原来的 2 倍得到的，周期 π，值域 $[-2, 2]$.

(8) 作图略. $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象是由 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再将所得图象上每一点的横坐标伸长为原来的 2 倍，进一步将所得图象上每一点的纵坐标扩大为原来的 3 倍，周期 4π，值域 $[-3, 3]$.

3. (1) 振幅 4，周期 8π，初相$\frac{\pi}{4}$；(2) 振幅 3，周期$\frac{\pi}{2}$，初相$\frac{\pi}{3}$；

(3) 振幅$\frac{4}{3}$，周期 8，初相$\frac{1}{4}$；(3) 振幅$\frac{3}{4}$，周期 π^2，初相$-\frac{\pi}{3}$.

4. (1) $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)$，振幅 2，周期 4π，初相 π，作图略.

(2) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，振幅 3，周期 π，初相$-\frac{\pi}{2}$，作图略.

5. (a) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；(b) $y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$.

6. 周期$\frac{1}{50}$，频率 50 Hz，10 A.

7. (1) -1；(2) 2；(3) 作图略.

8. $l=\frac{g}{4\pi^2}$.

复习题三（教材 P. 66）

1. $\alpha+\beta=0$.

2. $\left\{\alpha \mid \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{5}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

4. (1) 1；(2) 25.

5. $-\frac{1}{5}$.

6. $a=2$，$b=\pm 4$.

7. $y_{\min}=0$，$y_{\max}=6$.

8. (a) $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$；(b) $y=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

9. $\frac{3}{2}$ A，3 A，4π.

10. 90.

第4章 向 量

一、教学目标

1. 了解向量的实际背景，理解平面向量和向量相等的含义以及向量的几何表示.

2. 掌握向量加、减法的运算，并理解其几何意义.

3. 掌握向量数乘的运算，并理解其几何意义以及两个向量平行的含义.

4. 了解向量的线性运算性质及其几何意义.

5. 了解平面向量的基本定理及其意义. 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示. 会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算. 理解用坐标表示的平面向量平行的条件.

6. 理解平面向量数量积的含义及其物理意义，体会平面向量的数量积与向量投影的关系，掌握数量积的坐标表示式. 会进行平面向量数量积的运算，能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

7. 体会向量是一种处理几何、代数、三角、物理学问题的工具，提高解决实际问题的能力.

二、教材说明

向量不同于数量，它是一种新的量，平面向量是新教材中新增的内容. 用向量的方法研究问题，在数学和物理学中有着广泛的应用.

本章在介绍向量概念时重点说明了向量与数量的区别，然后又重新规定了向量代数的部分运算法则，包括加法、减法、实数与向量的积、向量的数量积的运算法则. 之后，又将向量与坐标联系起来，把关于向量的代数运算与数量（向量的坐标）的代数运算联系起来，其中包括：向量的坐标表示，向量的加法、减法，实数与向量的积，向量的数量积的坐标表示等. 这就为研究和解决有关几何问题又提供了两种方法——向量法和坐标法，并且在应用坐标法的时候要善于利用向量作为几何图形与代数解法之间的桥梁.

数学各部分内容之间的知识是相互联系的，学生的学习是循序渐进、逐步发展的. 为了培养学生对数学内部知识联系的认识，教材需要将不同的数学内容相互沟通，以加深学生对数学的认识和对本质的理解. 在学习向量的时候要搞清楚向量运算与数量运算的共同点和不同点，并且在以后学习其他内容时要善于将向量与其他各个不同的内容联系起来.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **12** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1　什么是向量　1课时

4.2　向量的加法　2课时

4.3　向量与实数相乘　2课时

4.4　向量的分解与坐标表示　2课时

4.5　向量的数量积

4.5.1　向量的数量积　1课时

4.5.2　利用数量积计算长度和角度　1课时

4.5.3　利用坐标计算数量积　1课时

4.6　向量的应用　1课时

小结与复习　1课时

四、教学建议

1．数学的发展既有内在的动力，也有外在的动力．数学教学中要体现课程改革的基本理念，在教学设计中要充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习．掌握数学的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，发展应用意识和创新意识．

2．在数学教学中，应注重发展学生的应用意识；通过丰富的实例引入数学知识，引导学生应用数学知识解决实际问题，经历探索、解决问题的过程，体会数学的应用价值．帮助学生认识到：数学与我有关，与实际生活有关，数学是有用的，我要学数学，我能用数学．

3．引入向量后，运算对象扩充了，要注意熟悉这套运算法则，特别要区别向量运算与实数运算的异同．另外通过向量的应用，学会把实际问题抽象为数学模型，提高解决问题的能力．向量知识处处充满唯物辩证法，是中学阶段不可多得的培养唯物辩证思想的内容，有目的、有计划地指导学生运用辩证唯物主义观点去研究问题，是对学生进行德育教育，培养学生辩证主义思想的途径．

4．向量虽然是一种与数量不同的新的量，但既然向量的运算也称为“加法”，“乘法”，“积”，它的运算就理所当然地与数的加法、乘法有许多共同的运算律．如加法的交换律、结合律，零向量的性质，负向量（类似于数的运算的相反数）的性质，实数与向量的乘积、向量的数量积对于加法的分配律等．因此，由以上运算律推出的许多结论在向量运算中仍然成立，可以照搬到向量运算中来．例如，将两数差的平方公式照搬到向量运算中就得到$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，它的几何意义就是余弦定理，也包括了勾股定理．因此我们说：“展开合并等闲算，勾股余弦不足奇．”“展开合并”就是指：对只涉及两个向量的数量积的算式，可以按与数的乘法类似的方式进行展开合并，并得到正确的结果．如此我们轻而易举就得到了余弦定理和勾股定理．

许多人有一种误解，以为高水平的数学就是善于区别，就是别人都看不出的差别你看得出来．其实恰恰相反：高水平的数学是善于抽象，抽象就是“不区别”，就是从许多不同的

事物中提取共同点．例如，从幼儿园开始就学习 $3+2=5$，并不是先学了加法的定义再学会加法，而是通过例子学会的．先让学生数手指：3 只手指加 2 只手指等于 5 只手指．也可以数乒乓球：3 个乒乓球加 2 个乒乓球等于 5 个乒乓球．手指是肉做的，是长的；乒乓球是圆的，很不相同．教师要引导学生忘记这种区别，将手指与乒乓球混为一谈，只注意它们数量多少的差别，这才学会了 $3+2=5$．这样的忘记差别的过程，也就是思维的过程，“由聪明而就是数学的抽象”．郑板桥说“聪明难，糊涂亦难，由聪明而糊涂尤难”，忽略差别就是“聪明而糊涂”，其实是更加聪明．到了初中，用字母表示数，例如，不论 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 代表什么数，乘法公式 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{ab}$ 都成立，这就连数量的多少也忽略掉了，从不同的数中抽象出了共同的运算律．现在则是进一步抽象：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不仅可以代表数，也可以代表向量，公式仍然成立．不少教材在证明向量运算等式时只字不提它与数的等式的类似之处，生怕学生加以类比和照搬．其实学生进行这种类比是不可避免的，也是合理的，并且在很多情况下是正确的．只有那些数学学得很差、联想能力很差的学生才不去进行这种类比．对这种类比，我们不应该去禁止，反而应当鼓励和引导，与学生一起去进行这种类比．例如，以上的公式 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{ab}$ 之所以对于数和向量都成立，就是因为在证明这个等式的过程中只用到加法的交换律、结合律、乘法对于加法的分配律，而这些运算律对于数与向量都成立．

然而，向量与数的运算律确实有重大区别，不能完全加以照搬．向量运算与数量运算的差别主要是：(1) 向量的数量积不满足“结合律”，即：一般来说 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 不成立．(2) 向量的数量积不满足消去律，即：一般来说不能由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即使当 $\boldsymbol{a}$ 不为 $\boldsymbol{0}$ 时也不能由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$．实际上，由于 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 已经不是向量而是数，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 根本就不是 $\boldsymbol{a}$ 与 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 的数量积，只能算是向量与数的乘积．即使这样理解，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 也不成立，这可以通过几何直观地加以说明．所以，要强调学生注意：凡是涉及两个以上的向量“相乘”的等式，就不能照搬数的运算法则．另外要强调的是只能展开和合并，不能在等式两边同时采用“约分”的方式“消去”一个因子．实际上，从教学情况看，学生在消去律方面犯错误比在结合律方面犯错误的情形多得多．要防止这种错误，不能采取因噎废食的方式，一概禁止学生照搬数的运算等式．正确而有效的方式是让学生搞清楚能照搬和不能照搬的条件，区别这两种不同的条件．

5．向量在其他学科，特别是物理学中有着广泛的应用．例如，物理学的力、速度、加速度、位移等都是向量，力的合成和分解是向量的加减，而功则是向量的数量积等．教师在向量的教学中，不妨找些向量在物理学中应用的例子以加强学生数理之间的联系．

五、评价建议

1．在向量的研究中注意向量的实际背景，利用实际背景引入向量的定义，使数学不再过分抽象．同时注意向量在物理学中的应用，以及向量与几何的关系．通过实例，让学生掌握向量加法、减法、数乘的运算，理解其几何意义，以及两个向量共线的含义．了解向量的线性运算性质及其几何意义，平面向量的基本定理及其意义．让学生掌握平面向量的正交分

解及其坐标表示．会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算．通过物理中“功”等实例，让学生理解平面向量数量积的含义及其物理意义．体会平面向量的数量积与向量投影的关系．掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量数量积的运算．经历用向量方法解决某些简单的平面几何、力学问题与其他一些实际问题的过程，体会向量是一种处理几何、物理等问题的工具，进而发展运算能力和解决实际问题的能力．对于向量基础知识的评价，既要看学生对背景知识的理解，对向量知识的抽象及运用，又要评价学生在认知的过程中的观察、分析问题、探究能力的形成与提高．

2．在学完本章的各节知识后，可以让学生联系平面几何的知识，用向量工具重新进行求解，以理解向量方法的使用条件和优越性．也可以让学生联系所学物理知识，进行向量的建模应用，从而评价学生对所学向量知识的应用能力，激发学生学习数学的兴趣．

3．笔试仍是定量评价的重要方式，本章之后进行一次笔试．笔试评价以源于教材，符合课标对模块设置所定知识目标的要求进行，要注重考查对数学概念的理解、数学思想方法的掌握特别是数形结合、化归等数学思想方法的掌握，在应用性题目中应尽量用学生可知的生活背景，避免叙述复杂、约束条件较为隐性的题目．评价难度控制在 0.75 为宜．试后让学生自己分析错因所在，并相互交流、讨论．

4．注意《教学大纲》的教学目标到《课程标准》的内容与要求的变化：

（1）对于平面向量的概念，《教学大纲》、《课程标准》均为掌握的要求．对于向量的几何表示，由《教学大纲》的掌握变为《课程标准》的理解，同时，《课程标准》特别强调理解平面向量相等的含义．

（2）对于平面向量的线性运算，《教学大纲》、《课程标准》均为掌握的要求，同时《课程标准》特别强调理解运算的几何意义．

（3）对于平面向量的基本定理，《教学大纲》、《课程标准》均为了解的要求．

（4）对于平面向量的坐标表示，由《教学大纲》的理解，变为《课程标准》的掌握正交分解及其坐标表示．

（5）对于平面向量的坐标运算，由《教学大纲》的掌握，变为《课程标准》的体会，同时《标准》特别强调理解用坐标表示的平面向量共线的条件．

（6）对于平面向量的数量积含义及其几何意义，由《教学大纲》的掌握，变为《课程标准》的理解．

（7）对于平面向量的数量积的坐标公式及其应用，由《教学大纲》的了解，变为《课程标准》的掌握数量积的坐标公式，会进行运算，能表示两个向量的夹角，会判断两个向量的垂直，《课程标准》特别强调向量在解决平面几何问题、力学问题与其他一些实际问题中的工具作用，发展学生的运算能力和解决实际问题的能力．

（8）对于《教学大纲》所要求掌握的平面两点间的距离公式、线段的定比分点公式和中点坐标公式以及向量的平移公式，《课程标准》均予以删除．

4.1　什么是向量

教材线索

本节从日常生活中涉及的实例入手，引出向量的概念，然后通过具体的例子得出向量的定义.

教学目标

1. 理解向量的概念，掌握向量的几何表示.

2. 了解模及相等向量的概念，学会辨认图形中的相等向量或作出与某一已知向量相等的向量.

教材分析

1. 重点

向量概念、相等向量的概念、向量的几何表示.

2. 难点

(1) 向量概念的理解；

(2) 在复杂的几何图形中能分清有向线段相等的关系.

3. 描述一个向量有两个指标：模、方向. 向量的模是非负实数，可以比较大小，但由于方向不能比较大小，所以向量不可以比较大小.

4. 长度（模）相等且方向相同的向量叫作相等向量，任意两个相等的向量都可以用同一条有向线段表示.

教学建议

两个向量只有当它们的模相等，同时方向又相同时，才能称它们相等. 例如 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，就意味着 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同. 由向量相等的定义可以知道，对于一个向量，只要不改变它的大小和方向，是可以任意平行移动的，这就是我们常说的自由向量. 因此，我们用有向线段表示向量时，可以任意选取有向线段的起点. 这就为以后用向量处理几何等问题带来方便. 教学时可以结合例题、习题说明这种思想.

例题解析

例 1 如图 4－1，某人想要从 A 点出发绕阴影部分走一圈，他可按图 4－2 提供的向量行走，则将这些向量按顺序排列为__________________.

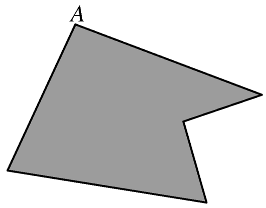

图 4－1

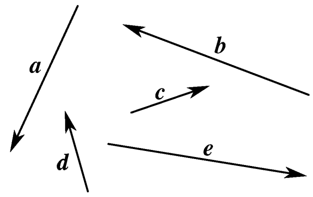

图 4－2

解答 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$.

例 2 （教材 P. 76，例）一艘货船从港口 O 出发，先向南偏东 $75°$航行了 100 km 到 A，再向北偏东 $60°$航行了 160 km 到 B. 一艘快艇也从港口 O 出发，向北偏东 $60°$方向航行了 160 km 到 C，接到命令要求立即从 C 直接航行到 B 去与货船会合. 快艇从 C 出发应向什么方向、航行多远，才能到达 B 点？

分析 在这里运动不仅有方向而且有距离，实际上具备了向量的特征. 数形结合，通过在同一平面内画图，容易得到四边形 $OABC$ 是一个平行四边形，从而求出答案. 这为理解两个向量的相等（方向相同且模相等）提供了实例. 本例同时还反映出向量的一个重要性质：平移性.

相关链接

漫谈向量

向量又称矢量，最初被应用于物理学. 很多物理量如力、速度、位移以及电场强度、磁感应强度等都是向量. 大约公元前 350 年前，古希腊著名学者亚里士多德就知道了力可以表示成向量，两个力的组合作用可用著名的平行四边形法则得到. “向量”一词来自力学、解析几何中的有向线段. 最先使用有向线段表示向量的是英国大科学家牛顿. 教材上讨论的向量是一种带几何性质的量，除零向量外，总可以画出箭头表示方向. 但是在高等数学中还有更广泛的向量. 例如，把所有实系数多项式的全体看成一个多项式空间，这里的多项式都可看成一个向量. 在这种情况下，要找出起点和终点甚至画出箭头表示方向是办不到的. 这种空间中的向量比几何中的向量要广泛得多，可以是任意数学对象或物理对象. 这样，就可以指导线性代数方法应用到广阔的自然科学领域中去了. 因此，向量空间的概念，已成了数学中最基本的概念和线性代数的中心内容，它的理论和方法在自然科学的各领域中得到了广泛

的应用. 而向量及其线性运算也为“向量空间”这一抽象的概念提供了一个具体的模型.

从数学发展史来看，历史上很长一段时间，空间的向量结构并未被数学家们所认识. 直到 19 世纪末 20 世纪初，人们才把空间的性质与向量运算联系起来，使向量具有一套优良运算通性的数学体系.

向量能够进入数学并得到发展，首先应从复数的几何表示谈起. 18 世纪末期，挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数 $a+bi$，并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算. 把坐标平面上的点用向量表示出来，并把向量的几何表示用于研究几何问题与三角问题. 人们逐步接受了复数，也学会了利用复数来表示和研究平面中的向量，向量就这样平静地进入了数学.

但复数的利用是受限制的，因为它仅能用于表示平面，若有不在同一平面上的力作用于同一物体，则需要寻找所谓三维“复数”以及相应的运算体系. 19 世纪中期，英国数学家汉密尔顿发明了四元数（包括数量部分和向量部分），以代表空间的向量. 他的工作为向量代数和向量分析的建立奠定了基础. 随后，电磁理论的发现者，英国的数学物理学家麦克斯韦把四元数的数量部分和向量部分分开处理，从而创造了大量的向量分析.

三维向量分析的开创，以及同四元数的正式分裂，是英国的居伯斯和海维塞德于 19 世纪 80 年代各自独立完成的. 他们提出，一个向量不过是四元数的向量部分，但不独立于任何四元数. 他们引进了两种类型的乘法，即数量积和向量积. 并把向量代数推广到变向量的向量微积分. 从此，向量的方法被引进到分析和解析几何中来，并逐步完善，成为了一套优良的数学工具.

4.2 向量的加法

教材线索

本节先解决本章开始的数学建模的例子，从而引出向量的加法，再由例题推导出向量加法的交换律和结合律以及向量加法的平行四边形法则，然后介绍零向量及相反向量，接着定义向量的减法.

教学目标

1. 掌握向量加法的概念，结合物理学实际理解向量加法的意义.

2. 能熟练地掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则，并能作出已知两向量的合向量.

3. 掌握向量加法的交换律和结合律，并会用它们进行向量运算.

4. 掌握向量的减法，会作两个向量的差向量.

教材分析

1. 重点

向量加法的三角形法则和平行四边形法则及向量的减法.

2. 难点

对向量加法和减法的定义的理解.

3. 向量的加法法则：(1) 三角形法则（首尾连接）；(2) 平行四边形法则（抓起点）.

4. 相反向量是定义向量减法的基础，减去一个向量等于加上这个向量的相反向量：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

教学建议

1. 启发学生在理解向量加法的定义时要结合图形语言，在说明向量加法的三角形法则和平行四边形法则的实质相同时，应提前复习相等向量的概念特点.

2. 在讲解向量减法的定义时，要通过相反向量来揭示向量减法与向量加法的内在联系，并由此通过对向量加法的三角形法则的理解来认识向量减法的三角形法则.

3. 本节教材当中有四个例题. 例 1 是用向量加法的三角形法则做题，教学时要注意训

练学生的作图语言以加深学生对向量加法的交换律和结合律的理解. 例 2 的实质是向量加法的平行四边形法则. 例 3 的目的是引出零向量及相反向量的定义. 例 4 是向量减法的作图题，教学时同样注意学生作图语言的训练.

例题解析

例 1 （教材 P. 80，例 1）（1）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意向量，作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 并进行比较，它们是否相等？

（2）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是任意向量，作出向量 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 并进行比较，它们是否相等？

分析 本例通过作图和几何推理，证明了向量的加法满足的两个运算律——交换律、结合律. 实际上，这是向量加法的三角形法则的一个具体运用，仍然反映出向量的平移性.

例 2 （教材 P. 81，例 2）$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$是从同一点出发的两个向量，求作它们的和.

分析 利用向量相等，通过作图发现，从同一点出发的两个向量的加法的实质，就是以这两个向量为邻边所作的平行四边形中，共始点且夹在两边之间的一条对角线向量. 和三角形法则殊途同归，相得益彰.

例 3 （教材 P. 82，例 3）已知 A，B 是任意两点，求$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$.

分析 向量的和仍然是个向量. 此题从位移的角度理解，易于得到零向量. 从而为引入相反向量提供理论支撑. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，为引入向量的减法打下基础. 同时反映了加法和减法运算的一致性.

例 4 化简下列各式：

（1）$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$；（2）$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$；

（3）$\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}$.

分析 运用加、减法的运算法则，要善于将减法运算转化为加法运算.

解 （1）原式$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$.

（2）原式$=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{CB}$.

（3）原式$=\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}$

$=\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}$

$=\mathbf{0}$.

例 5 如图 4－3，在重 300 N 的物体上系两根绳子，这两根绳子在铅垂线的两侧，与铅垂线的夹角分别为 30°，60°，求平衡时，两根绳子拉力的大小.

分析 两根绳子所受的力之和与重力的大小相等方向相反，已知合力，即可求得分力.

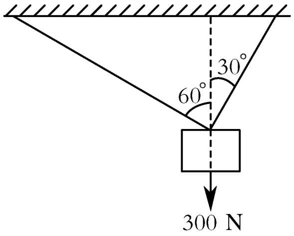

图 4－3

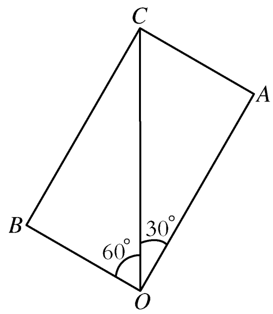

图 4－4

解 如图 4－4，作平行四边形 $OACB$，使$\angle AOC=30°$，$\angle BOC=60°$，则$\angle CAO=90°$.

$\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，又$\overrightarrow{OC}=300$ N.

$\therefore |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|\cos 30°=150\sqrt{3}$(N)，

$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OC}|\sin 30°=150$(N).

$\because |\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AC}|$，

$\therefore |\overrightarrow{OB}|=150$ N.

答：与铅垂线成 30°的角的绳子拉力为 $150\sqrt{3}$ N，与铅垂线成 60°角的绳子的拉力为 150 N.

相关链接

矢量加法的两个法则

一、平行四边形法则

求两个互成角度的共点力的合力，可以用表示这两个力的线段为邻边作平行四边形，这两个邻边之间的对角线就表示合力的大小和方向，这种方法叫作“力的平行四边形法则”.

我们知道加、减、乘、除的算术运算是用来计算两个以上的标量的，如质量、面积、时间等. 例如，求密度就要用体积去除质量. 标量之间的运算不需要特别的手续，只有一个要求，那就是单位要一致.

但是，矢量相加就要用特别的方法，因为被加的量既有一定的数值，又有一定的方向，相加时两者要同时考虑. 在力学中经常遇到的矢量有位移、力、速度、加速度、动量、冲量、力矩、角速度和角动量等.

若用 3 mm 代表 1 km. 如图 4－5 所示的那样，以纸面上某点 A 作为出发点，作矢量$\overrightarrow{AB}$，长 3 cm，代表向东 10 km；然后在 A 点再作$\overrightarrow{AD}$同$\overrightarrow{AB}$成 45°角，长 1.5 cm，代表向东北 5 km. 然后，过点 B 作 BC 平行 AD，过点 D 作 DC 平行 AB，由此便得到平行四边形 $ABCD$. 从点 A 向点 C 作射线$\overrightarrow{AC}$，这就是总位移矢量.

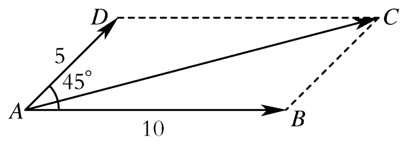

图 4－5

应注意物体点 A 不是受$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$三个力的作用．因为$\overrightarrow{AC}$是$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AB}$的合力，表示$\overrightarrow{AC}$的作用效果与$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$的共同作用效果是一样的，因此可以用$\overrightarrow{AC}$代替$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AB}$的共同作用，但绝不能把$\overrightarrow{AC}$当成作用在物体上的第三个力．

一个矢量，只要遵守平行四边形法则，可以分解为两个，或无穷个．但是矢量的合成不同，两个矢量只能合成为一个矢量．

二、三角形法则

矢量相加的另一个法则是三角形法则．如图 4－6，矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和是将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 头尾相接，例如，将矢量 $\boldsymbol{b}$ 的起点与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点相接，此时以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{c}$ 就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢量和．根据矢量相加的三角形法则求得的矢量和与相加的两矢量的求和次序无关．

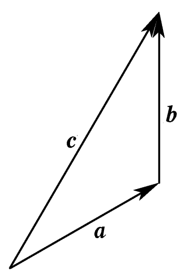

图 4－6

例如，有一艘船，如图 4－7 所示，由湖中 A 点先向正北方向航行6 km到了 B 点，然后航向转了 90°，向东再航行了 4 km 到达 C 点．航行的总距离是(6＋4) km，但是出发点到终点的距离（位移的大小）显然小于 10 km.

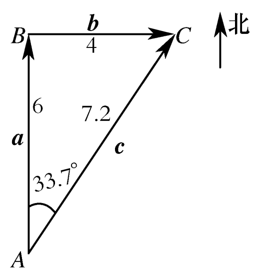

图 4－7

如果要问船在什么地方，离出发点有多远，方位如何，也就是说，我们要求船的总位移，而不是关心船走了多远的距离，那么就不能用简单的标量加法去计算了．矢量加法就要

用几何作图法，其详细步骤如下：

在纸上先画一条纵向直线 AB，长度为 6 cm，在 B 端加一箭头，代表向北走了 6 km，即向北的位移为 6 km. 接着，再由 B 向右画一横线 BC 垂直于 AB，长度为 4 cm，在 C 端加箭头以表示向东的位移为 4 km. 最后，把始点 A 和终点 C 连起来，加箭头于 C 端，这就是总的位移矢量. 用尺量出它的长度，是 7.2 cm，按我们上述的比例，$\overrightarrow{AC}$相当于 7.2 km.

我们说，向北的位移$\overrightarrow{AB}$加上向东的位移$\overrightarrow{BC}$等于总位移$\overrightarrow{AC}$，用矢量形式写出为

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

或用黑体字母记为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

再用一个量角器量出$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AB}$的夹角为 33.7°，于是知道合成矢量 $\boldsymbol{c}$ 的方向为东偏北 33.7°.

矢量的加法有两种：一种是三角形法则，另一种是平行四边形法则. 它们本质上是一样的. 若用三角形法则求总位移似乎更直观些，而用平行四边形法则求力的合成好像更容易理解.

4.3 向量与实数相乘

教材线索

本节先由具体例子过渡到一般的实数与向量的积的定义法则，接着得出两个向量平行的充要条件，后由例题得出向量与实数的乘法的运算律及其应用，最后介绍单位向量.

教学目标

1. 掌握实数与向量积的定义，理解实数与向量积的几何定义.
2. 掌握实数与向量的运算律.
3. 理解两个向量平行的充要条件.

教材分析

1. 重点：

向量数乘运算及其几何意义；两个向量平行的含义.

2. 难点：

向量数乘运算的几何意义的理解.

3. 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{v}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{v}$. 它的长度和方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{v}|=|\lambda||\boldsymbol{v}|$；

(2) $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{v}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同；$\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{v}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反；$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

4. 向量是一种新的运算对象，关于数量的代数运算在向量范围内不一定都能施行，因此必须重新规定向量的有关运算法则和运算律.

5. 向量的线性运算包括向量的加法、减法、实数与向量的积以及它们的混合运算. 向量线性运算的结果仍是向量.

6. 向量平行的充要条件实际上是由实数与向量的积推出的. 利用这个结论证明几何中的三点共线和两直线平行的问题有时会很容易.

教学建议

1. 实数与向量的积的定义可以看作是数与数的积的概念的推广，启发学生在掌握向量

加法的基础上，学习实数与向量的积的概念及运算律，引导学生从特殊归纳出一般.

2. 在学习实数与向量的积的运算律时，应引导学生寻求其与代数运算中实数乘法的运算律的相似性. 但应注意它们之间的区别，从而掌握实数与向量的积及其应用.

3. 用字母表示的向量在进行线性运算时，可以像多项式加法和数乘多项式那样去运算，这是由于它们的运算律相同. 但决不能误认为这是照搬数集中的运算律，向量线性运算的运算律是根据新的运算对象经过重新规定和验证的，学习向量运算必须要有这种观念.

4. 要能利用实数与向量的积的定义及性质解决平面几何中的问题（几何意义）.

例题解析

例 1 （教材 P. 84，例 1）设一艘船上午 8:00 开始以 v km/h 的速度向东北方向航行，中午 12:00 的时候船在一个已知的地点 O，当天下午 13:30 它在何处？当天上午 10:00 它在何处？

分析 通过运动实例引入实数与向量相乘的运算概念. 理解速度向量是解决问题的关键.

例 2 （教材 P. 85，例 2）从任一点 O 出发作已知向量$\overrightarrow{OA}$.

(1) 求作$\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OA}$；

(2) 在直线 OA 上任取一点 O'，作$\overrightarrow{O'C'}=1.5\overrightarrow{OA}$；

(3) 在直线 OA 外任取一点 O_1，求作$\overrightarrow{O_1B_1}=-2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{O_1C_1}=1.5\overrightarrow{OA}$；

(4) 看一看：你作出的这些有向线段与有向线段 OA 有怎样的位置关系？在同一条直线上或与所在的直线相交、平行？

分析 首先明确向量$\overrightarrow{OA}$，如同运动选取参照物和方向一样，由于所求向量始点的选取位置的约束，使得我们作出的图形有两种情况——共线或平行，但实质仍是两个向量的相等问题.

例 3 （教材 P. 86，例 3）设 A，B，C 三点不共线，将下列几何事实用向量语言来描述.

(1) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

(2) 四边形 $ABCE$ 是梯形，其中 AB，EC 是梯形的两底；

(3) M 是 BC 的中点；

(4) G 在线段 AM 上，且 $AG:GM=2$；

(5) Q 在 MA 的延长线上.

分析 本题是加深对向量理解的一个非常有用的实例，使学生在对初中平面几何内容复习巩固的同时，借助向量这个非常有用的工具，进一步认识平面几何中的基本图形，包括数量关系.

例 4 （教材 P. 88，例 4）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，试解释等式$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 的

几何意义.

分析 向量的运算体现了数形结合的思想. 通过数的形式，洞察形的性质，是深刻认识向量的内在要求. 本题刻画了三角形中位线定理，同时要求认识到向量加、减运算的三角形法则、平行四边形法则以及数乘向量——平行向量的应用，还要认识到向量的平行在平面图形中的具体表示. 教材后面提到的例 5 及例 6 均是以非常简单而又非常基础的平面几何知识为载体，再现以上知识要点.

例 5 （教材 P. 90，例 7）已知非零向量 $\boldsymbol{a}$.

（1）求与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同且长度为 1 的向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$；

（2）求与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反且长度为 3 的向量 $\boldsymbol{b}$.

分析 本题又是对平行向量的理解，并引入了单位向量. 单位向量的要点：单位向量的长度为 1，其方向虽然带有任意性，但要按照问题的实际情况，或所给向量的方向而定，因而具有相对性.

例 6 （教材 P. 90，例 8）已知$\triangle ABC$及其两边长 $|AB|=c$，$|AC|=b$. 怎样用向量的语言描述：点 E 在$\angle BAC$的角平分线上？

分析 点 E 在$\angle BAC$的角平分线上，则$\overrightarrow{AE}$一定是向量$\overrightarrow{AE}$方向上某向量$\overrightarrow{AE_0}$的非负实数倍，问题就转化为：如何求出或构造出向量$\overrightarrow{AE_0}$，显然，利用$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$各自方向上的单位向量的和向量必在$\angle BAC$的角平分线上，可构造出$\overrightarrow{AE_0}$（虽然它不是单位向量）.

例 7 四边形 $ABCD$ 是一个梯形，且 $AB\parallel CD$，$AB=2CD$，M，N 分别是 DC 和 AB 的中点，如图 4－8，已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{MN}$.

分析 利用“首尾相接的向量构成封闭图形时，其中各向量的和为零向量”解之.

解 $\because AB=2CD$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

在梯形 $ABCD$ 中，有$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$，

即 $\boldsymbol{a}+\overrightarrow{BC}+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$.

$\therefore \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

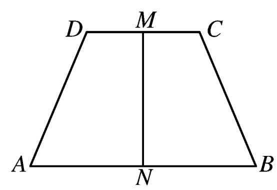

图 4－8

在四边形 $ADMN$ 中，有$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}=\boldsymbol{0}$，

即 $\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\overrightarrow{MN}+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\boldsymbol{0}$.

$\therefore \overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

例 8 在平行四边形 $ABCD$ 中，M 是 AB 的中点，N 是 BD 上一点，$BN=\frac{1}{3}BD$. 如图 4－9.

求证：M，N，C 三点共线.

证明 设$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$.

则$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=\frac{1}{6}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

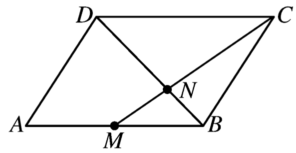

图 4－9

又$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

$=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$，

∴$\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MN}$，故 M，N，C 三点共线.

相关链接

向量的几何价值

用向量表示几何元素（点、直线、平面）很容易，并且很直接．选一个定点，那么，任何一个点都可以用一个向量来表示．对于一条直线 l，如果我们的兴趣只在于它的方向，那么用一个与 l 平行的（非零）向量 $\boldsymbol{a}$ 就行了．如果想确定该直线的位置，则还要在 l 上任选一点，这样，一个点 A，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 原则上确定了直线 l（如图 4－10）．这是对直线 l 的一种定性刻画．如果想具体地表示 l 上的每一个点，我们需要实数 k 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘法 $k\boldsymbol{a}$．这时，l 上的任意一点 x 都可以通过点 A 和某个 $k\boldsymbol{a}$ 来表示．希望在“实际”上控制直线 l，可以看作是引入 $k\boldsymbol{a}$ 的一个原因.

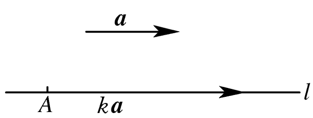

图 4－10

现在来看平面．两条相交直线确定一个平面 α，因而一个定点，两个不平行的（非零）向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 便在“原则”上确定了平面 α．这是对平面的一种定性刻画．但在讨论几何问题时，常常涉及平面 α 上的某一点 x，为了具体地表示它，我们需要引入向量的加法($\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$)．这时，平面 α 上的点 x 就可以表示为 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$（以及定点 A），而成为可操控的对象了（如

图 4－11).

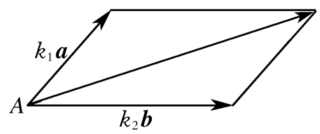

图 4－11

在解决几何问题时，这种表示能发挥很重要的作用．虽然向量的加法、数乘向量有非常坚实的物理背景，但当我们舍弃了这种背景而只从纯数学的角度来看问题的话，上述考虑可使我们看到引进相应的向量运算的理由，这可以使我们更容易接受并喜爱向量运算．

这样，一个定点，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 以及数乘向量 $k\boldsymbol{a}$ 便给出直线 l 的“坐标系”；而一个定点，两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以及数乘向量和向量加法这两个运算，就给出了平面 α 的一个“坐标系”．类似地，空间的一个“坐标系”可以由一个定点，三个不共面的向量，以及数乘向量和向量加法这两个运算来给出．在这样的“坐标系”中，几何元素及其关系不但可以得到定性刻画，而且还能定量地表示．另外，我们可以根据需要处理的问题的具体条件，根据解决问题的需要（自由地）选择“坐标系”，并且还可以在同一个平面上选择多个“坐标系”．

4.4 向量的分解与坐标表示

教材线索

本节先由实例引出定理3，并得出一组基及坐标的概念，接着推导出向量的坐标运算法则及平行的坐标表示的充要条件，最后是得出平面向量基本定理.

教学目标

1. 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示.
2. 会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算.
3. 理解用坐标表示的平面向量平行的条件.
4. 了解平面向量基本定理及其意义.

教材分析

1. 重点：

（1）平面向量基本定理；

（2）平面向量的坐标运算.

2. 难点：

（1）平面向量基本定理的理解与应用；

（2）理解向量坐标化的意义.

3. 对平面向量基本定理的理解，参照物理学中力的分解，把平面内的任一向量分解到两个不平行的非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 所在的直线上，再由平面向量基本定理可得 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$（其中 x，y 是实数）.

4. 引进向量坐标后，向量的运算问题可以转化为实数的运算问题来解决.

5. 学习中，要把点的坐标（x，y）与向量的坐标区分开来，两者不是一个概念.

6. 两个向量平行的充要条件有两种形式：

（1）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；

（2）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1y_2-y_1x_2=0$.

教学建议

1. 平面向量基本定理是说明同一平面内任一向量都可表示为两个不平行的向量的线性

组合．该定理是平面向量坐标表示的基础．

2．向量的坐标表示，实际上是向量的代数表示．在引入向量的坐标表示后，即可使向量运算完全代数化，将数与形紧密地结合起来．这样很多几何问题的证明，就转化为学生熟知的数量运算，这也是中学数学教材设置向量的目的之一．对于向量的坐标运算一定要让学生掌握．

3．本节共有5个例题．例1的目的是引出定理3，例2是运用向量坐标的定义来解题，例3和例4是应用向量共线的坐标表示的题，例5得出了一个很重要的结论．这些例题都是基础题，教学时，要注意相应题目类型的训练．

例题解析

例1　（教材P.92，例1）一艘船从港口O出发向南偏东75°航行了100 km到港口A，然后向北偏东60°航行了160 km到达B．B在O的什么方向，与O相距多远？

分析　本题画出$\triangle OAB$后发现，在这个三角形中知道边OA、AB的长度及可以求出$\angle A$的大小，这个三角形不是直角三角形，我们所具有的求角的大小的知识是在直角三角形中．另一方面，位移OB实际上就是从O点出发到B点终止的若干个首尾相接的向量的和．我们将运动转化为在南北与东西方向上的若干个首尾相接的向量的和，问题就容易解决了．用此题引入“向量的分解与坐标表示”的知识，既具有实践性、探索性，也具有一般性，易与直角坐标系建立联系，百川归海．

例2　（教材P.97，例2）设平面上建立了直角坐标系，O是原点．P点的坐标是(x_1, y_1)，Q点的坐标是(x_2, y_2)．$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$分别是x轴、y轴正方向上的单位向量．以$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$为基．

（1）写出$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$的坐标；

（2）求向量$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$，$3\overrightarrow{OP}$，$3\overrightarrow{OP}+4\overrightarrow{OQ}$的坐标；

（3）求向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标．

分析　通过直角坐标系中正交的一组基表示向量，得到以原点为起点的向量的坐标表示，实际上把向量的加、减及数乘运算简化为代数运算．化繁为简、化难为易．

例3　已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，且$\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{v}$，求$x$．

解　$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,2)+2(x,1)=(1+2x,4)$，

$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(1,2)-(x,1)=(2-x,3)$．

$\because \boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{v}$，$\therefore 3(1+2x)=4(2-x)$．

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$．

例4　已知点$A(-1, -1)$，$B(1, 3)$，$C(1, 5)$，$D(2, 7)$，判断：$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$平行吗？直线AB与CD平行吗？

解　$\because \overrightarrow{AB}=(1,3)-(-1,-1)=(2,4)$，

$\overrightarrow{CD}=(2,7)-(1,5)=(1,2)$.

又∵$2\times2=4\times1$，

∴$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$.

又$\overrightarrow{AC}=(1,5)-(-1,-1)=(2,6)$，

$\overrightarrow{AB}=(2,4)$，

且 $2\times4\neq6\times2$，

∴$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$不平行.

∴A，B，C 三点不共线，故直线 AB 与 CD 平行.

相关链接

加强重要结论的应用意识

1. 重视定义、性质的应用意识

平行向量与垂直向量的性质以及三点共线的充要条件与向量知识有着广泛的应用.

例 如图 4－12，设抛物线 $x^2=2py$（$p>0$）图象的焦点为 F，经过 F 的直线交抛物线

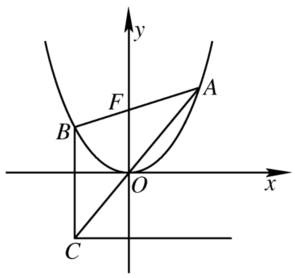

图 4－12

于 A、B 两点，点 C 在抛物线的准线 $y=-\dfrac{p}{2}$上，且 $BC/\!/y$ 轴，求证：直线 AC 经过坐标原点 O.

证明 如图 4－12，设 $A\left(x_1,\dfrac{x_1^2}{2p}\right)$，$B\left(x_2,\dfrac{x_2^2}{2p}\right)$. 由题意可知 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$.

所以$\overrightarrow{AF}=\left(-x_1,\dfrac{p^2-x_1^2}{2p}\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,\dfrac{x_2^2-x_1^2}{2p}\right)$.

由 A、F、B 三点共线，可得$(x_2-x_1)\dfrac{p^2-x_1^2}{2p}+x_1\dfrac{x_2^2-x_1^2}{2p}=0$.

∵$x_1\neq x_2$，∴$x_1x_2=-p^2$.

易得$\overrightarrow{OA}=\left(-x_1,-\dfrac{x_1^2}{2p}\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(x_2-x_1,-\dfrac{p^2+x_1^2}{2p}\right)$.

$\because (x_2-x_1)\left(-\frac{x_1^2}{2p}\right)-x_1\ \frac{p^2+x_1^2}{2p}=\frac{x_1^3-x_1^2x_2-p^2x_1-x_1^3}{2p}=\frac{-x_1(p^2+x_1x_2)}{2p}=0$,

$\therefore \overrightarrow{OA}/\!/\overrightarrow{AC}$.

又$\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{AC}$有公共点 A,

所以 A、O、C 三点共线，即直线 AC 经过坐标原点.

2. 归纳例（习）题结论并能充分应用

许多例（习）题都是具有一般性的数学命题，如果我们能够随时加以归纳、总结，并将它们应用于解决其他的数学题中，将十分有益.

命题 设 O 是点 A 和点 B 的连线外一点，则点 P 和点 A、B 共线的充要条件是存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.

下面用本命题证明上例.

证明 抛物线的焦点为 $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$，准线 $y=-\frac{p}{2}$.

设$\overrightarrow{OB}=(x_0,\ y_0)$，由于 A、F、B 三点共线，可设$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OF}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$,

则$\overrightarrow{OA}=\left((1-\lambda)x_0, \frac{\lambda}{2}p+(1-\lambda)y_0\right)$.

由 $BC/\!/y$ 轴,如图 4 - 12,可得$\overrightarrow{OC}=\left(x_0, -\frac{p}{2}\right)$.

又点 A 在抛物线上,则$(1-\lambda)^2x_0^2=2p\left(\frac{\lambda}{2}p+(1-\lambda)y_0\right)$.

由前面证明知$(1-\lambda)x_0\times x_0=-p^2$，即 $\lambda=1+\frac{p^2}{x_0^2}=1+\frac{p}{2y_0}$.

从而$\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{p^2}{x_0},\ \frac{p^3}{2x_0^2}\right)$，而$\overrightarrow{OC}=\left(x_0,\ -\frac{p}{2}\right)$,

所以$\overrightarrow{OA}=-\frac{p^2}{x_0^2}\overrightarrow{OC}$,

即$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{AC}$共线，也就是直线 AC 过坐标原点.

4.5 向量的数量积

4.5.1 向量的数量积

教材线索

本节由物理学中功的问题引出数量积的定义及其几何意义，最后介绍数量积的运算律.

教学目标

1. 掌握平面向量的数量积及其几何意义.
2. 掌握平面向量的数量积的运算律.

教材分析

1. 重点

平面向量的数量积的定义.

2. 难点

平面向量的数量积的定义及运算律的理解.

3. 要深刻理解向量的夹角的概念.

(1) 两个非零向量的夹角的范围为 $[0, \pi]$.

(2) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，其夹角为 θ，则

$\theta=0^\circ \Leftrightarrow \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同；

$\theta=90^\circ \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

$\theta=180^\circ \Leftrightarrow \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反.

4. 与 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$ 不同，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 不是一个向量，而是一个实数，则

(1) $0\leqslant\theta<90^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；

(2) $90^\circ<\theta\leqslant180^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$；

(3) $\theta=90^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

5. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 不是一个向量，而是一个实数. 它的符号取决于 θ 角的范围.

6. 向量的数量积的运算律满足交换律，以及与数乘的结合律、分配律，但不满足结合律. 如$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$，因为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$表示一个与$\boldsymbol{c}$共线的向量，而$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$表示一个与$\boldsymbol{a}$共线的向量.

教学建议

两向量的数量积是两向量之间的一种乘法，是中学代数中以前从未遇到过的一种新的乘法，与数的乘法是有区别的，这就给理解和掌握这一概念带来了一些困难. 在讲解这一概念时，要注意以下几点：

(1) 两向量的数量积是个数量，而不是向量，它的值为两向量的模与这两向量夹角的余弦的乘积，其符号由夹角的余弦值决定.

(2) 两向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的数量积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$虽与代数中两个数$a$，$b$的乘积$a\cdot b$不同，但又类似，所以书写时一定要把它们严格区分开，以免影响后面的学习.

(3) 当$\boldsymbol{a}\neq 0$，由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$不能推出$\boldsymbol{b}$一定是零向量. 这是因为对于任一与$\boldsymbol{a}$垂直的非零向量$\boldsymbol{b}$，都有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(4) 已知实数a，b，c（$b\neq 0$），则$ab=bc\Rightarrow a=c$；但对于向量，该推理就是不正确的，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$不能推出$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.

例题解析

例 1 （教材 P.102，例）一辆小车在拉力$\boldsymbol{F}$的作用下沿水平方向前进了s km. 拉力$\boldsymbol{F}$的大小为F N，方向与小车前进的方向成α角. 求$\boldsymbol{F}$所做的功$\boldsymbol{W}$.

分析 通过做功的概念，引入向量的数量积（又称为内积或点积）的定义. 要注意数乘向量运算和数量积是两个不同的概念. 数乘向量运算的结果仍是向量，向量的数量积的结果却是一个实数，不是向量.

例 2 用向量法证明：菱形的两条对角线互相垂直.

分析 如图 4－13 所示，要证$AC\perp BD$，只要证$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$即可.

证明 如图 4－13，四边形$ABCD$是菱形，即$AB=BC=CD=DA$.

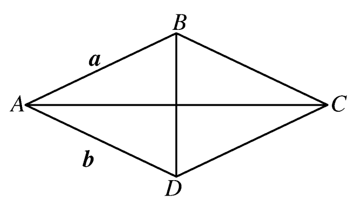

图 4－13

设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2=0$.

$\therefore \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

即菱形的两条对角线互相垂直.

例 3 已知 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$，试判断$\triangle ABC$的形状，并给出证明.

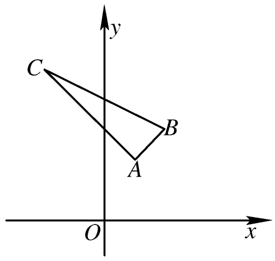

图 4－14

解 如图 4－14，在平面直角坐标系中标出 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$ 三点，我们发现$\triangle ABC$是直角三角形，下面给出证明.

$\because \overrightarrow{AB}=(2-1,3-2)=(1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2-1,5-2)=(-3,3)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-3)+1\times3=0$.

$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形.

相关链接

向量进入中学数学的背景分析

1. 向量的双重性

向量是一个具有几何和代数双重身份的概念，同时向量代数所依附的线性代数是高等数学中一个完整的体系，具有良好的分析方法和完整结构. 通过运用向量对传统问题的分析，可以帮助学生更好地建立代数与几何的联系，也为中学数学向高等数学过渡奠定了一个直观的基础. 这方面的案例包括平面几何、立体几何和向量解析几何.

2. 认识向量的另外角度

把平面和空间看成是一个向量场，可以培养学生对结构数学的认识，而结构数学是现代数学发展的主要方向. 利用参数方程的概念，可以把曲线看作向量函数的轨迹，可以使学生方便地运用微积分于几何的研究和学习中. 这里也可以把向量的引入理解为现代数学与初等数学的衔接的组成部分之一.

3. “数、量与运算”的扩大

从“数、量与运算”发展的角度理解“向量”，把向量的加法（减法）、数乘以向量和向

量的数量积看作新的运算，使学生认识到数、量和运算的形式在不断地发展．更为重要的是在教材和教师教学的处理上应该表现出“数、量和运算”的一个发展趋势链，其中数的发展包括正整数（自然数）→零和自然数→正分数（有限小数和无限循环小数）→非负有理数→有理数→无理数（无限不循环小数）→实数→复数，从代数结构的角度看，经历了整数域→有理数域→实数域→复数域（1883 年 Hamilton 的四元数域是不满足乘法交换律的复数域的扩大，在此意义上说复数域是最大的数域），这些“数”所对应的“量”都是一类的，并且至此“运算”的结构没有改变，从整体上看“数”在发展，而“量”及“运算”没有本质的发展．因此向量不是“数”的简单扩大，它所关注的不是“数”的扩大问题，而是“量及运算”的扩大问题．因而在向量的引入时，不宜从代数方程的角度出发，可能从力学的实际背景出发更能体现出“量”的发展．同时还应该强调的是向量代数是以前所有“数的运算”的一个发展（如果我们能够引入向量的数量积运算，将使学生第一次看到运算可以不满足交换律的真正案例），使学生对此问题有一个发展的理解，由此也为今后引入矩阵及其运算作了铺垫．

4．国际数学教育对向量的处理

国际数学教育的发展已全面反映了综合几何的学习的落后，向量和矩阵进入中学数学是一个大的趋势，比如美国 NCTM2000 的《学校数学的原则和标准》、《新西兰数学课程标准》和《澳大利亚数学教学大纲》都在此问题上有全面的反映．从总体上分析，基本共识是基于以下的事实：1899 年希尔伯特的《几何学基础》的发表，标志着几何学基础的彻底革新，也发展了现代数学的公理化模式．以此为推动力，数学本体上在这个方面的研究几乎穷尽．中学的综合几何就是扩大了公理体系的希尔伯特几何的简单情形．如果我国几何教学仍然停留在此不动，那么很难说我们的数学教育反映了数学发展的进程，也与国际数学教育的发展相去甚远．

5．数学和物理学的关系在向量中的体现

数学和物理学的关系在中学阶段应该得到重视和发展，事实上一个良好的物理或现实背景是学生对数学产生兴趣和学好数学的重要因素，并且数学和物理世界是如此紧密关联，就是 20 世纪最伟大的数学家之一、为“纯数学”而竭力辩白的英国数学家哈代也曾说：“……还没有哪个数学家纯到对物理世界毫无兴趣的地步……”尤其到今天，数学和物理学的关系是有目共睹的．而向量在力学中的应用即使在中学阶段也是不难发现的．使学生尽早地认识到数学与物理世界的紧密关系，不仅可以增强学生学习的兴趣，同时也能使学生认识到数学其伟大的社会性．

6．数学“机械化”与向量的关系

吴文俊先生在《数学通报》1995 年 2 月期的《数学教育现代化问题》一文中明确指出：数学教育现代化问题就是机械化问题．吴文俊先生说：“现代化就是机械化……我想谈的主要是中学范围里边的数学现代化，或者照我的看法，所谓数学机械化的问题．”

关于传统几何的改革，吴文俊先生说：“对欧几里得几何应该怎么看，我说明一下我的

看法，我有点倾向于恩格斯的数学关系. 数学研究数量关系与空间形式，简单讲就是形与数，欧几里得几何体系的特点是排除了数量关系.”“……对于几何，对于研究空间形式，你要真正的腾飞，不通过数量关系，我想不出有什么好办法.”吴文俊先生明确指出为了使中学几何“腾飞”，必须采取“数量化”的方法，也就是代数化几何的处理方法. 事实上，我们不难发现向量几何具有一定的机械化.

7. 向量的教学实践过程可行性问题

在中学阶段引入是完全可以接受的. 这是因为：第一，学生有初步的平面坐标几何的基础；第二，教师有良好的立体几何的教学背景，教师在把传统的综合几何转移到向量代数处理立体几何时有很好的直观背景，并可以使之迁移到学生的学习过程中去. 除此之外，现代化技术（包括多媒体教学技术和后PC时代的掌上技术）在向量的“教与学”中可以帮助教师和学生. 利用图形计算器、计算机和动态几何软件不仅可以解决几何“直观性”的问题，同时也使得学生的向量学习入门更容易理解. 在国际上，这种案例是很多的.

4.5.2 利用数量积计算长度和角度

教材线索

本节由数量积的定义直接得出长度公式、夹角余弦公式及垂直条件，最后由例题得出余弦定理.

教学目标

1. 掌握长度公式、夹角余弦公式及其应用.
2. 会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

教材分析

1. 重点

长度公式、夹角余弦公式及垂直条件.

2. 难点

长度公式、夹角余弦公式及垂直条件的应用.

3. 要熟记向量的数量积的重要性质：

涉及向量的模的问题，常用性质$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$求解；$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$常用于求两个向量的夹角；$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$体现数与形的相互转化，应用甚广.

4. 在向量运算中，完全平方公式$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$及平方差公式$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$可以直接应用.

教学建议

利用向量的数量积的定义可以推出长度公式、夹角余弦公式及两个向量垂直的充要条件. 因此，用向量的数量积可以处理有关长度、角度、垂直的问题. 为了降低难度，本节课后只安排了三道练习题，都是这几个公式的简单应用，未涉及与几何中的长度、角度、垂直等问题有关的证明. 课堂上要把握教学要求，不要补充这方面的内容.

例题解析

例 1 （教材 P. 107，例）设向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不平行，试解释向量等式$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$的几何意义.

分析 数形结合，得到三角形的余弦定理. 回过头来，我们再解决教材 P. 92 例题中的问题，就更容易了.

例 2 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，

(1) 若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2) 若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

(3) 若$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$垂直，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

解 (1) 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向，则$\theta=0°$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 0°=\sqrt{2}$.

若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向，则$\theta=180°$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 180°=-\sqrt{2}$.

(2) $\because$
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2\\&=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°+|\boldsymbol{b}|^2\\&=3+\sqrt{2},\end{aligned}$$

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

(3) $\because (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，

$\therefore (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2=1$.

于是$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \theta=45°$.

向量的两个简单性质及应用

性质 设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$是空间中的三个向量，如图 4－15，则有：

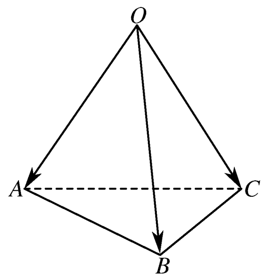

图 4－15

(1) ①$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}$；

②$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}$；

③$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}$.

（按一定顺序对棱所表示的向量之和相等）

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

（空间中的三个向量，每一个向量与其他两个向量的差的数量积的顺序之和等于零）

证明 (1) 可由向量的运算性质直接得到.

(2) 因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AO})$

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CO}=0$.

当$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$是共线向量时，由(2)可得下面一个巧妙的结论：

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

下面我们来看这个性质的应用.

例 1 在四面体 $A-BCD$ 中，设棱 AD 和 BC 所成的角为 α，则

$$\cos\alpha=\frac{|(AB^2+CD^2)-(AC^2+BD^2)|}{2AD\cdot BC}.$$

证明 如图 4－16，由性质(2)得

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0.$$

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.

又因为$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\langle\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\rangle$，

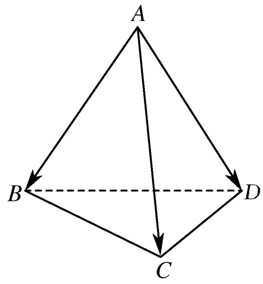

图 4－16

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$

$$=\left[\frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{DC}^2}{2}-\frac{(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})^2-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{DB}^2}{2}\right]\div(|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|)$$

由性质(1)知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$，

所以上式 $=\dfrac{\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{DB}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{DC}^2}{2|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}$.

所以 $\cos\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle|=\dfrac{|(AB^2+CD^2)-(AC^2+BD^2)|}{2AD\cdot BC}$

(其中 α 与 $\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle$ 相等或互补).

4.5.3 利用坐标计算数量积

教材线索

本节先介绍了由坐标计算数量积的公式，接着用坐标表示向量的模的公式、投影值的公式、夹角余弦的公式及垂直的条件.

教学目标

1. 掌握平面向量的数量积的坐标表示及几个公式.
2. 会用平面向量数量积的坐标表示解决问题.

教材分析

1. 重点

平面向量数量积的坐标表示以及由此推出的长度、角度、垂直关系的坐标表示.

2. 难点

向量的长度、角度、垂直关系的坐标表示的灵活应用.

3. 坐标法是用代数方法研究几何问题的一个重要的思想方法. 引入坐标后，就把向量的数量积的运算与两个向量的坐标运算联系起来，从而得到平面向量的数量积的坐标表示公式.

4. 向量的数量积的坐标表示常用来计算两向量间的夹角.

教学建议

1. 本节的内容是把向量的坐标表示与向量的数量积结合起来研究的. 因此在讲解之前不妨先把前面的基础知识加以复习，这样有利于学生理解本节的知识点.

2. 在引入坐标后，本节又给出了向量垂直的充要条件的另一种表示法，即 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$，该公式经常用到，要让学生掌握.

例题解析

例 1 （教材 P. 108，例 1）设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是相互垂直的单位向量，向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 下的坐标分别是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2). 求：

(1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$；

(2) $|\boldsymbol{u}|$，$|\boldsymbol{v}|$；

(3) 当 $\boldsymbol{v}\neq 0$ 时，求 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影值 $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{v}}$；

(4) 当 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 都不为零时，求 $\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$；

(5) 坐标满足什么条件时，$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$?

分析 直角坐标系中用基表示的两个向量的数量积的运算，犹如两个多项式的乘法. 此题分别引入利用向量的坐标直接用来计算的非常基础而又应用广泛的 5 个公式.

例 2 设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴、y 轴上的单位向量，且 $\boldsymbol{a}=(m+1)\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+(m-1)\boldsymbol{j}$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，求实数 m 的值.

解 $\because \boldsymbol{a}=(m+1)\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(m+1,-3)$,

$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+(m-1)\boldsymbol{j}=(1,m-1)$,

$\therefore (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(m+2,m-4)$,

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(m,-2-m)$.

$\because (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\therefore (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,

即 $(m+2,m-4)\cdot(m,-2-m)=0$.

$\therefore m(m+2)+(m-4)(-2-m)=0$.

解得 $m=-2$.

相关链接

公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$ 的另一种证法

定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 的夹角，$\theta\in[0,\pi]$．由于平面向量的数量积满足交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 对称，所以不妨设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 逆时针旋转 θ 与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 方向相同．如图 4－17，在直角坐标系中 OA（向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 的方向）是角 α 的终边，$\alpha\in(0,2\pi)$．

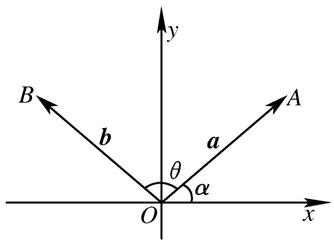

图 4－17

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$x_1=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$，$y_1=|\boldsymbol{a}|\sin\alpha$，$x_2=|\boldsymbol{b}|\cos(\alpha+\theta)$，$y_2=|\boldsymbol{b}|\sin(\alpha+\theta)$．　①

因为 $\cos\theta=\cos[(\alpha+\theta)-\alpha]=\cos(\alpha+\theta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\theta)\sin\alpha$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\alpha+\theta)\cos\alpha+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\alpha+\theta)\sin\alpha$，

即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha|\boldsymbol{b}|\cos(\alpha+\theta)+|\boldsymbol{a}|\sin\alpha|\boldsymbol{b}|\sin(\alpha+\theta)$．

将①代入上式得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$．

以上证法可以明显地看出向量的数量积的定义与坐标表示之间的直接联系，同时应用了三角函数知识，有利于巩固已学的知识．

4.6　向量的应用

教材线索

本节通过 3 个例题说明向量是一种处理几何、物理学问题的工具.

教学目标

体会向量是一种处理几何、物理学问题的工具，提高解决实际问题的能力.

教材分析

1. 重点

向量在几何、物理学中的应用.

2. 难点

通过向量在几何、物理学中的应用提高学生解决实际问题的能力.

3. 教材从几何、物理学两方面来说明向量的应用，很好地加强了数学与其他学科特别是物理学的联系.

教学建议

向量之所以有用，是由于它有一套优秀的运算系统，可以把对空间性质的研究转化为运算来完成. 向量主要有下列应用：

(1) 向量是数学中证明几何命题的有效工具之一. 根据平面向量基本定理，在同一平面直线型图形中的线段都可以表示为某些向量的线性组合. 这样在证明几何命题时，可先把已知和结论表示成向量，再通过向量的运算就很容易得出结论. 一般地，利用实数与向量的积可证明平行、长度等问题；利用向量的数量积可解决长度、角度、垂直等问题.

(2) 向量的数量积体现了向量的长度与三角函数间的关系，把向量的数量积应用到三角形中，就能解决三角形的边角之间的有关问题.

(3) 向量是从一些物理量中抽象出来的，它与物理学中力学、运动学等有着天然的联系. 用向量解决有关物理问题，可以先根据题意把物理向量用有向线段表示出来，再转化为数学中的向量运算来求解.

例题解析

例 1 （教材 P. 111，例 1）设 $ABCD$ 是四边形，则

$$AC\perp DB\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

分析 本题是充分且必要的推证形式，对于充分性，可直接通过勾股定理得到右面的结论，对于必要性，设 AC 交 BD 于 E 点，并设$\angle CED=\alpha$（$0°<\alpha<180°$），使用余弦定理、诱导公式通过对等式的讨论，可以推得 $\alpha=90°$，从而得到 $AC\perp BD$. 但是推证、计算过程较为繁琐，如果学生没有余弦定理的知识作基础或对之没有印象，那是很难证明的. 而利用向量解决此题不必引入余弦定理的知识. 如教材中的旁白——“愚公移山”就可以了，体现了向量解决几何问题的“工具性”、“有效性”与“实用性”.

例 2 （教材 P. 112，例 2）三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 的大小相等，并且它们的合力为 0，求这三个力两两的夹角.

分析 本例主要说明使用向量的灵活性，不必拘泥于代数运算还是几何性质.

例 3 （教材 P. 112，例 3）质量为 m 的物体静止地放在斜面上，斜面与水平面的夹角为 α，求斜面对于物体的摩擦力的大小 F.

分析 使用正交向量，如同建立、使用直角坐标系，注意向量的灵活性，不必拘泥于直角坐标系轴的水平（或垂直）与否，以解决问题方便为出发点.

说明 通过以上例题，让学生总结体会向量方法，使学生体会向量方法在解决几何问题或与几何图形有关的实际问题，特别是力学、运动学、电场、磁场等有关问题时，操作的简易性和实用性，得到学科横向与纵向相关知识的融会贯通，从中受益.

例 4 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 E，O 是任意一点，

求证：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\,\overrightarrow{OE}$.

证明 如图 4－18.

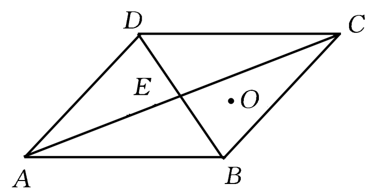

图 4－18

∵E 是对角线 AC 和 BD 的交点，

∴$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{DE}$.

在$\triangle OAE$ 中，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}$.

同理可得$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}$，

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}$，

$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}$.

相加可得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\,\overrightarrow{OE}$.

相关链接

巧用向量的数量积解题举例

本文探讨了数量积与点到直线距离公式之间的内在联系，给出了推导点到直线距离与点到平面距离公式的几种新方法.

设向量 $\boldsymbol{a}=\{X_1, X_2\}$，$\boldsymbol{b}=\{Y_1, Y_2\}$（二维空间向量）或 $\boldsymbol{a}=\{X_1, X_2, X_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{Y_1, Y_2, Y_3\}$（三维空间向量），其夹角为 θ. 那么，这两个向量的数量积定义为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cos\theta$.

用坐标来表示有：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1Y_1+X_2Y_2$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3$.

1. 用向量的数量积解决问题

例 1 若 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，

求证：$a^2+b^2=1$.

证明 构造向量 $\boldsymbol{a}=\{a, \sqrt{1-a^2}\}$，$\boldsymbol{b}=\{b, \sqrt{1-b^2}\}$，

那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\cos\theta=1$，$\therefore\theta=0°$.

所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，因此有 $\dfrac{a}{1-b^2}=\dfrac{1-a^2}{b}$（$b\neq0$），$\therefore a^2+b^2=1$.

当 $b=0$ 时，显然有 $a=1$，即 $a^2+b^2=1$.

例 2 实数满足 $x+y+z=a(a>0)$，$x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2}$，

求证：x，y，$z\in\left[0, \dfrac{2}{3}a\right]$.

证明 由 x, y, z 的对称性，只需证明其中一个即可，构造向量 $\boldsymbol{a}=\{1, 1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x, y\}$，那么由已知可得

$|z-a|=|x+y|=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a^2-2x^2}$.

所以 $|z-a|\leqslant\sqrt{a^2-2x^2}$.

解得 $0\leqslant z\leqslant\dfrac{2}{3}a$.

同理 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}a$，$0\leqslant y\leqslant\dfrac{2}{3}a$.

例 3 解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4}, \\ -8x+6y-24z=39.\end{cases}$

解 此题的实质是一个平面与一个球面，求其交点的问题.

构造向量 $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$，$\boldsymbol{b}=\{-8, 6, -24\}$，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8x+6y-24z=39$.

另一方面 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=26\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\theta=39\cos\theta$.

所以 $\cos\theta=1$.

因此有 $x=-8t$，$y=6t$，$z=-24t$.

代入方程 $-8x+6y-24z=39$ 可解出 $x=-\frac{6}{13}$，$y=\frac{9}{26}$，$z=-\frac{18}{13}$.

例 4 已知 α，$\beta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$. 求 α，β 的值.

解 原条件可化为 $\sin\alpha\sin\beta+(1-\cos\alpha)\cos\beta+\cos\alpha-\frac{3}{2}=0$.

构造向量 $\boldsymbol{a}=\{\sin\alpha, 1-\cos\alpha\}$，$\boldsymbol{b}=\{\sin\beta, \cos\beta\}$，

则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=\left|\cos\alpha-\frac{3}{2}\right|\leqslant\sqrt{\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)^2}$，

$\therefore\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$，

$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

$\therefore\alpha=\frac{\pi}{3}$.

由 α，β 的对称性知 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

2. 向量的数量积与点到直线距离公式的内在联系

先看坐标原点到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离与数量积的关系.

构造向量 $\boldsymbol{a}=\{A, B\}$，$\boldsymbol{b}=\{x, y\}$，

那么 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|Ax+By|=|C|=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\theta$，而 $\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\theta=d$ 就是坐标原点到此直线的距离，即有 $d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

若求任意点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离，也可用构造向量的方法求出，不过这时令 $\boldsymbol{a}=\{A, B\}$，$\boldsymbol{b}=\{x-x_0, y-y_0\}$，其夹角仍为 θ. 同上法，即可推出

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

习题参考解答

4.1 练习（教材 P.77）

1. 位移、力、功是向量，其余的都不是向量.
2. 是.

习题 1（教材 P.78）

1. B.
2. （1）作图略；（2）600.
3. 与$\overrightarrow{AO}$相等的向量有$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{EF}$；

   与$\overrightarrow{AC}$相等的向量有$\overrightarrow{FD}$；

   与$\overrightarrow{AO}$相等的向量有$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FA}$，$\overrightarrow{BA}$；

   与$\overrightarrow{AC}$相等的向量有$\overrightarrow{DF}$，$\overrightarrow{FD}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{BF}$.

4.2 练习（教材 P.81）

1. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.
2. （1）在原地；（2）西南方向，离出发点 $2\sqrt{2}$ km；

   （3）正东方向，离出发点 2 km；（4）在原地.

4.2 练习（教材 P.83）

1. $\mathbf{0}$.
2. （1）$\overrightarrow{AB}$；（2）$\overrightarrow{AB}$.

习题 2（教材 P.83）

1. 直角.
2. 提示：当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；利用三角形两边之和大于第三边及三角形两边之差小于第三边可证得结论.
3. 零向量.
4. $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA})$，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$.
5. （1）作图略；（2）回到正东方向前进 1 m.
6. $|\boldsymbol{F}_1|=5$ N，$|\boldsymbol{F}_2|=5\sqrt{3}$ N.

4.3 练习（教材 P. 87）

1. 作图略.
2. 梯形.

4.3 练习（教材 P. 91）

1. 平行四边形.
2. $k=-1$
3. $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

习题 3（教材 P. 91）

1. （1）作图略；

（2）$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

$\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{AC_2}-\overrightarrow{AB_2}=-1.5\,\overrightarrow{AC}+1.5\,\overrightarrow{AB}=1.5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-1.5\,\overrightarrow{BC}$；

（3）$B_1C_1\parallel BC$ 且 $B_1C_1=\frac{1}{3}BC$，$B_2C_2\parallel BC$ 且 $B_2C_2=\frac{3}{2}BC$.

2. （1）作图略；（2）中点，重心.
3. （1）中点；（2）在线段 AB 上.
4. （1）$-3\boldsymbol{b}$；（2）$\mathbf{0}$.
5. $k=-8$.
6. 证明：$\because \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=6\boldsymbol{e}_1+23\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2=10\boldsymbol{e}_1+15\boldsymbol{e}_2$，

$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，

$\therefore \overrightarrow{BD}=5\,\overrightarrow{AB}$.

$\therefore A$，B，D 三点共线.

7. （1）$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$；

（2）平行四边形.

8. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\boldsymbol{b}$.
9. 证明：$\because \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\frac{1}{3}\,(2\,\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

同理 $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$.

$\therefore \overrightarrow{AG}$与$\overrightarrow{AD}$共线，$G$ 为$\triangle ABC$ 三条中线的交点.

10. B.

4.4 练习（教材 P. 100）

1. 证明：$\because \overrightarrow{AB}=(2-1,5-4)=(1,1)$，

$\overrightarrow{AC}=(-2-1,1-4)=(-3,-3)$，

$\therefore 1\times(-3)-1\times(-3)=0$.

$\therefore \overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，

故 A，B，C 三点共线.

2. $D(-4,\ -1)$.

3. $x=\frac{1}{2}$.

4. $x=2$，$y=3$.

习题 4（教材 P. 101）

1. (1) $D(1,\ 4)$；(2) $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$.

2. $x=3$.

3. $\overrightarrow{DA}=\left(\frac{7}{2},\ 4\right)$.

4. $\lambda=1$，$\mu=-2$.

5. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

6. D.

4.5.1 练习（教材 P. 105）

1. (1) ± 20；(2) 0；(3) 10；(4) -10.

2. $\frac{12}{5}$.

4.5.2 练习（教材 P. 108）

1. $\lambda=\dfrac{3}{2}$.
2. 等边三角形.
3. 菱形.

4.5.3 练习（教材 P. 110）

1. (1) -8，13，72；(2) 3，$\sqrt{41}$；(3) $-\dfrac{4}{5}$.
2. (1) $k=19$；(2) $k=-\dfrac{1}{3}$.

习题 5（教材 P. 110）

1. 证明：$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，

   又 $-1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$，

   $\therefore -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

   当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.
2. 略.
3. 120°.
4. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{23}$.
5. $k=-5$.
6. $-\sqrt{2}$.
7. 120°.
8. 正方形.
9. $B(2,\ -1)$ 或 $B(1,\ 2)$；$\overrightarrow{AB}=(-1,\ -2)$或$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 1)$.
10. $-\dfrac{2}{3}$或$\dfrac{11}{3}$或$\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.
11. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-16,-8)$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(-8,-12)$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

4.6 练习（教材 P. 113）

1. 略.
2. 不能，$|\boldsymbol{F}|\cos\theta_1=|\boldsymbol{F}_1|\cos\theta_2$.
3. 不是.

习题 6（教材 P. 113）

1. 已知：如图 4-19，AC 是$\odot O$ 的一条直径，$\angle ABC$ 是圆周角.

求证：$\angle ABC=90°$.

证明：设$\overrightarrow{AO}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，

则$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

$\therefore \angle ABC=90°$.

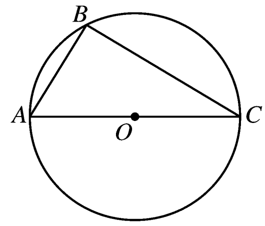

图 4-19

2. 实际航速是 6 m/s，向东偏北 60°方向航行.

3. 360 g.

4. 提示：$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}\Rightarrow(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})^2$

$\cdots\Rightarrow\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{d}^2$，同理得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{d}^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2$，所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{d}|$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又$|\overrightarrow{AC}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\cdots=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=|\overrightarrow{BD}|^2$，

故四边形 $ABCD$ 是矩形.

5. 证明：如教材 P. 114 图 4-33，$\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$，

$\therefore \overrightarrow{OP}^2=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-2\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-2\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$.

设$|\overrightarrow{OA}|=a$，半径为 r，则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}^2&=r^2+r^2+a^2+2r\cdot r\cdot\cos\angle BOC-2r\cdot a\cdot\cos\angle AOB-2r\cdot a\cdot\cos\angle AOC\\&=2r^2+a^2+2r\cdot r\cdot\frac{r^2+r^2-\overrightarrow{BC}^2}{r^2}-2r\cdot a\cdot\frac{r^2+a^2-\overrightarrow{AC}^2}{ra}-2r\cdot a\cdot\frac{r^2+a^2-\overrightarrow{AB}^2}{ra}\\&=2r^2+a^2+4r^2-4r^2-4a^2+2(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}^2)\\&=2r^2-3a^2=\text{常数，从而得证.}\end{aligned}$$

复习题四（教材 P. 121）

1. 略.

2. 提示：

$\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle BAD$，

$\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle BAD$，

两式相加得证.

3. $\overrightarrow{BD_1}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{B_1D}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

4. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}$.

5. $k=-4$.

6. $\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

7. $m=6$.

8. （1）-1；（2）$-1\pm\sqrt{3}$.

9.（1）$-\dfrac{3}{2}$，-3，不存在；（2）0.

10. $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{11}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{11}\boldsymbol{b}$.

11. $A\left(\dfrac{8}{3}，0\right)$和 $B(0，-12)$.

12.（1）证明：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)+(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)$

$$=\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\sin^2\alpha-\sin^2\beta=0.$$

故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直.

（2）$\beta-\alpha=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

13. 16 个，16 个.

14. 是定值. 如图 4-20 所示. 设$\angle POP_6=\theta$，半径为 r，则

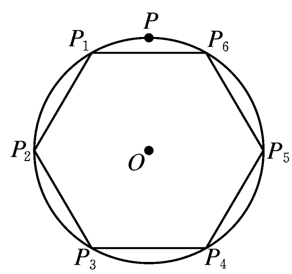

图 4-20

$|\overrightarrow{PP_6}|^2=(\overrightarrow{OP_6}-\overrightarrow{OP})^2=\overrightarrow{OP_6}^2+\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OP_6}\cdot\overrightarrow{OP}=2r^2-2r^2\cdot\cos\theta$,

$|\overrightarrow{PP_5}|^2=(\overrightarrow{OP_5}-\overrightarrow{OP})^2=\overrightarrow{OP_5}^2+\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OP_5}\cdot\overrightarrow{OP}=2r^2-2r^2\cdot\cos(60^\circ-\theta)$,

$|\overrightarrow{PP_4}|^2=(\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP})^2=\overrightarrow{OP_4}^2+\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OP_4}\cdot\overrightarrow{OP}=2r^2-2r^2\cdot\cos(120^\circ-\theta)$,

$|\overrightarrow{PP_3}|^2=(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP})^2=\overrightarrow{OP_3}^2+\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP}=2r^2-2r^2\cdot\cos(180^\circ-\theta)$,

$|\overrightarrow{PP_2}|^2=(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP})^2=\overrightarrow{OP_2}^2+\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP}=2r^2-2r^2\cdot\cos(120^\circ+\theta)$,

$|\overrightarrow{PP_1}|^2=(\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP})^2=\overrightarrow{OP_1}^2+\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP}=2r^2-2r^2\cdot\cos(60^\circ+\theta)$.

六式左右对应相加得$|\overrightarrow{PP_1}|^2+|\overrightarrow{PP_2}|^2+\cdots+|\overrightarrow{PP_6}|^2=12r^2$.

可推广为$|\overrightarrow{PP_1}|^2+|\overrightarrow{PP_2}|^2+\cdots+|\overrightarrow{PP_n}|^2=2nr^2$.

第 5 章　三角恒等变换

一、教学目标

1. 掌握两角和与差的正弦、余弦、正切公式.

2. 掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式.

3. 通过公式的推导，了解它们的内在联系，从而培养逻辑推理能力.

4. 能正确运用三角公式，进行简单的三角函数式的化简、求值、恒等式证明（包括引出积化和差、和差化积、半角公式，但不要求记忆）.

二、教材说明

1. 本章利用向量的数量积推导出两角差的余弦公式，并由此公式导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式；二倍角的正弦、余弦、正切公式等.

2. 三角恒等变换公式反映了角的相加、相减、二倍角运算引起三角函数值变化的规律，是研究三角函数性质及其应用的一种工具. 学习和应用三角恒等变换，有利于发展推理能力和运算能力.

3. 三角恒等变换具有几何和物理的应用背景. 以向量为桥梁将三角恒等变换的算式与直观的几何图形相互沟通和转化，不仅有助于学习和应用三角恒等变换，还能提高学习数学的兴趣，体会数学是一个有机联系的整体，而不是各不相关的内容的堆积.

三、课时安排建议

本章教学时间大约需要 **8** 课时，建议分配如下（仅供参考）：

5.1　两角和与差的三角函数	
5.1.1　两角和与差的正弦和余弦	2 课时
5.1.2　两角和与差的正切	1 课时
5.2　二倍角的三角函数	2 课时
5.3　简单的三角恒等变换	2 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

本章利用向量的数量积推导出两角差的余弦公式，然后按以下顺序推导其余公式：

$C_{(\alpha+\beta)} \rightarrow C_{(\alpha-\beta)} \rightarrow S_{(\alpha+\beta)} \rightarrow S_{(\alpha-\beta)} \rightarrow T_{(\alpha+\beta)} \rightarrow T_{(\alpha-\beta)} \rightarrow S_{2\alpha} \rightarrow C_{2\alpha} \rightarrow T_{2\alpha}$.

在导出这些公式后，教材安排了对它们的运用的训练（包括引出半角公式、和差化积及积化和差，但不要求学生记忆）.

五、评价建议

1. 三角恒等变换的研究经历了用向量的数量积推导出两角差的余弦公式的过程，进一步体会向量方法的作用，了解了两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，同时用例题的形式给出了半角公式、和差化积、积化和差公式（不要求记忆），培养了学生的变形能力及应用能力.

可以组织学生进行一次三角函数应用的实验——建模研究，可以采取分组合作的方式进行. 评价学生对于三角函数知识的掌握及应用能力.

笔试性评价不能出现超出《课程标准》所要求的概念与公式. 三角变换的题目不宜复杂，注意和前面所学知识的联系，不强调技巧性.

2. 注意《教学大纲》的教学目标到《课程标准》的内容与要求的变化：

(1)《课程标准》特别强调经历用向量的数量积推导出两角差的余弦公式的过程，进一步体会向量的作用，这是《教学大纲》未作要求的.

(2) 对于两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，《教学大纲》都是掌握的要求，而《课程标准》只是要求能从两角差的余弦公式导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式.

(3) 在运用三角变换公式进行简单的恒等变换上，《教学大纲》和《课程标准》都包括推导积化和差、和差化积、半角公式，均不要求记忆.《课程标准》中对三角变换公式的定义仅限定为两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式.

5.1 两角和与差的三角函数

5.1.1 两角和与差的正弦和余弦

教材线索

本节利用向量的数量积推导出两角差的余弦公式，并由此公式推导出两角和的余弦公式及两角和与差的正弦公式.

教学目标

1. 掌握 $C_{(\alpha-\beta)}$ 公式的推导，并能用赋值法求出公式 $C_{(\alpha+\beta)}$.
2. 掌握利用 $C_{(\alpha\pm\beta)}\to S_{(\alpha\pm\beta)}$ 得到的两角和与差的正弦公式.
3. 应用公式 $C_{(\alpha\pm\beta)}$，$S_{(\alpha\pm\beta)}$ 进行三角式的求值、化简.

教材分析

1. 重点

正弦、余弦的和（差）角公式.

2. 难点

两角差的余弦的推导.

3. 本节的中心公式是 $\cos(\alpha-\beta)$，然后对 α，β 作不同的特值代换可得其他公式. 故灵活适当地赋值是学好本节内容的基础.

4. 凑角、逆用公式是本节要实现的技能之一，能否灵活地求解问题，关键是合理地组合角 α，β 并选择好合理的公式进行有效的正用或逆用.

5. 用公式 $C_{(\alpha\pm\beta)}$ 表示复角 $\alpha\pm\beta$ 的余弦与单角 α，β 的正弦、余弦的关系，运用时要注意公式两边符号上的差异.

6. 公式对任意角 α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 都成立.

教学建议

1. 本节是在学生已学过任意角的三角函数的基础上，进一步研究用单角的三角函数表

示两角和与两角差的三角函数. 在讲解之前，应该使学生明确两角和与两角差的意义. 例如 $\sin(\alpha+\beta)$是两角 α 与 β 和的正弦，它表示 $\alpha+\beta$ 终边上任意一点 P 的纵坐标与原点到点 P 的距离之比，在一般情况下，$\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta$，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$，所以要提醒学生注意，不能把 $\sin(\alpha+\beta)$按分配律展开.

2. 在本节的公式中，余弦的差角公式是基础，要着重把它讲好. 因为其余公式是由它和诱导公式导出的.

例题解析

例 1 （教材 P. 127，例 1）已知两个角 α，β 的正弦、余弦 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$，求 $\alpha+\beta$ 的余弦.

分析 本例是三角函数中给值求值问题，让学生体会如何用单角的三角函数表示复角的三角函数，加深对差角余弦公式中角的任意性的认识. 求解的过程也是推导和角的余弦公式的过程. 提倡探究的过程价值和其应用价值.

例 2 （教材 P. 127，例 2）求 $75°$，$15°$角的正弦、余弦.

分析 $75°$，$15°$不是特殊角，但它是特殊角的和、差，通过和角与差角的余弦公式即可解决，让学生感受和、差角公式应用带来的好处. 对同一个角分别求其正弦、余弦，包含有复习同角三角函数的求法. 本题解法是诱导公式的解法，作为拓展还可给出平方关系的解法. 本例为教材中的例 3 的讲解埋下了伏笔.

例 3 （教材 P. 128，例 3）已知两个角 α，β 的正弦、余弦，求 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 的正弦.

分析 学生已有的知识是和角余弦公式，转化、同化成为解决问题的手段，从而得到解决问题的思路：首先要会利用诱导公式将正弦转化为余弦，再利用和角与差角的余弦公式即可求解. 让学生深刻体会数学中化归的思想方法，同时理解 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 也是一个角，为课后习题的解决奠定了基础.

例 4 （教材 P. 128，例 4）已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$，且 α，β 都是第四象限的角. 求 $\sin(\alpha-\beta)$的值.

分析 目的是加深对公式的理解以及公式的作用，同时复习了同角的基本关系及角的终边在各象限时三角函数的符号知识. 本题是这一章节的基本题型之一.

例 5 （教材 P. 128，例 5）求下列式子的值：

（1）$\cos 20°\cos 40°-\sin 20°\sin 40°$；

（2）$\sin 5°\cos 40°+\sin 85°\sin 40°$.

分析 对于数学中的常用公式，不仅仅要会推导并熟记，而且还要会正用和逆用，本例就要求学生会逆用公式. 第(1)题给出了向量的坐标解法，既体现了向量在三角中的应用，也突出了向量工具性的作用. 第(2)题可以培养学生的观察能力，要注意 $5°$与 $85°$互余，利用

诱导公式将正、余弦互化，再应用公式解决．在这里体现了个性与共性、形式与内容的辩证关系，可以培养学生的辩证思维能力．

例 6 已知 $\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{3}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$（　　）

A. $\frac{13}{36}$　　B. $\frac{59}{72}$　　C. $\frac{13}{72}$　　D. $-\frac{59}{72}$

分析 两式平方后相加可得．

答案 B

例 7 求证：$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

分析 把 $2\alpha+\beta$ 分解成 $\alpha+(\alpha+\beta)$，从化简左边入手．

证明 左边 $=\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$$=\frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\text{右边}.$$

故原式成立．

相关链接

三角函数与欧拉

三角是以三角形的边角关系为基础，研究几何图形中的数量关系及其在测量方面的应用的数学分支．“三角”一词的英文是 trigonomtry，就是由两个希腊词“三角形”和“测量”合成的．现在，三角主要研究三角函数的性质及其应用．

1464 年，德国数学家雷格蒙塔努斯发表了《论一般三角形》，正式使三角学脱离天文学而成为一门独立学科．17 世纪前叶，三角由瑞士人邓玉函（Jean Terrenz，1576—1630）传入中国．在邓玉函等人的著作《大测》二卷中，主要论述了三角函数的性质及三角函数表的制作和用法．当时，三角函数是用如图 5－1 中的八条线段的长来定义的，这已与我们刚学过的三角函数十分类似．

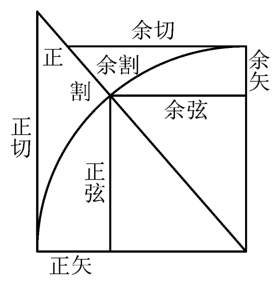

图 5－1

著名数学家、物理学家和天文学家欧拉（Leonard Euler）1707 年出生于瑞士的巴塞尔，1720 年进入巴塞尔大学学习，后获硕士学

位．1727 年起，他先后到俄国、德国工作，1766 年再次到德国直至逝世．

1748 年，欧拉出版了一部划时代的著作《无穷小分析引论》，其中提出三角函数是对应的三角函数线与圆的半径的比值，并令圆的半径为 1，这使得对三角函数的研究大为简化．他还在此书的第八章中提出弧度制的想法．他认为，如果把半径作为 1 个单位长度，那么半圆的长度就是 π，所对圆心角的正弦是 0，即 $\sin\pi=0$．同理，圆的$\frac{1}{4}$的长是$\frac{\pi}{2}$，所对圆心角的正弦是 1，可记作 $\sin\frac{\pi}{2}=1$．这一思想将线段与弧的度量单位统一起来，大大简化了某些三角公式及其计算．

18 世纪中叶，欧拉给出了三角函数的现代理论，他还成功地把三角函数的概念由实数范围推广到复数范围．

值得指出的是，1735 年，欧拉右眼失明，《无穷小分析引论》这部著作出版于他遭遇这一不幸之后，他的著作，其样式、范围和记号堪称典范，因此被许多大学作为教材使用．1766 年，他回到俄国不久，又转成双眼失明．他以惊人的毅力，以自己口述由别人记录的方式工作了近 17 年，直到 1783 年去世．1909 年，瑞士自然科学学会开始出版欧拉全集，他卷帙浩繁的著作才得以流芳百世．

5.1.2 两角和与差的正切

教材线索

本节先推导两角和的正切公式，继而推导出两角差的正切公式，然后利用两角和与差的公式解决问题．

教学目标

1．掌握两角和与差的正切公式．

2．能正确运用这些公式进行简单的三角函数式的化简、求值．

教材分析

1．重点

两角和与差的正切公式的推导及特征．

2．难点

灵活运用公式进行化简、求值．

3．公式 $T_{(\alpha\pm\beta)}$ 成立的条件是：角 α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 都不等于 $k\pi\pm\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$．当 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 与 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 中有一个不存在时，就不能用公式，只能用其他方法求解．

4．“化未知为已知”是推导公式和数学解题的常用方法．

教学建议

1．关于正切的和角公式，应启发学生根据同角三角函数的基本关系式 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 及正弦、余弦的和角公式导出，以培养他们的推理能力．推导正切的差角公式时，要用到正切的和角公式及诱导公式 $\tan(-\beta)=-\tan\beta$．学生还未学过这一诱导公式，要及时给予补充．

2．在解题时，要注意角的恒等变换，如已知 $\alpha+\beta$，$\beta-\frac{\pi}{4}$ 的三角函数值，求 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 的某些三角函数时，可将 β 表示为 $(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$ 的形式．

3．关于教材中的例 3，学生可能觉得题目很奇怪：一元二次方程的根怎么会是 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，而且 α，β 的值都不知道？事实上，解完例 3 后，可以复习一下一元二次方程的有关知识：只要取 $a=1$，那么一元二次方程

$$x^2-(\tan\alpha+\tan\beta)x+\tan\alpha+\tan\beta=0$$

的两个根就是 $\tan\alpha$，$\tan\beta$．所以这里是取 $a=1$，$b=-\tan\alpha-\tan\beta$，$c=\tan\alpha\tan\beta$，其中 $\tan\alpha\tan\beta$ 不能等于 1．满足 $\tan\alpha\tan\beta\neq 1$ 的 α，β 有无限多个，这样，上述方程的存在性及其两个根 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 就不难理解了．

4．对于公式 $T_{(\alpha\pm\beta)}$ 的运用，解题时要多观察、勤思考、善于联想，注意归纳解题方法，适当进行角的变换，灵活运用基本公式，特殊角函数的应用是三角恒等变换中常用的方法和技能．

5．在进行三角恒等变换时，常常要熟练地应用某些公式的变形及派生公式，这有利于公式的灵活运用及加快解题证明的速度，如 $T_{(\alpha\pm\beta)}$ 可变形为 $\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$．

例题解析

例 1　（教材 P. 130，例 1）求 $\tan 75°$，$\tan 15°$ 的值．

分析　该例与教材 P. 127 的例 2 类似，由于 $75°$，$15°$ 角是特殊角的和、差，通过两角和与差的正切公式就可以解决．此例可以加深学生对公式的理解和应用．

例 2　（教材 P. 131，例 2）已知 α，β 满足 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\tan\beta$ 的值．

分析　本例由于 α，β 是任意角，$\tan\alpha$ 又不是特殊值，在没有计算器等辅助工具又没有由通过三角函数值求角的反三角函数知识的前提下，我们无法得出 α 的具体值，采取先求 β

的值后再求 $\tan\beta$ 已不可能．考虑到 $\frac{\pi}{4}$ 是一个特殊角，因而想到用 $\frac{\pi}{4}$，α 表示 β，再利用两角差的正切公式即可求出 $\tan\beta$．这里要求学生会处理多变元，将待求的元用已知元表示，进而得出结果．本题可以利用方程的思想处理，将 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 代入 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}$ 解方程，求出 $\tan\beta$，以培养学生的数学思想方法．

例 3　（教材 P. 131，例 3）已知一元二次方程 $x^2+bx+c=0(c\neq 1)$ 的两根为 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值．

分析　解答本例要有“整体”的思想，不用单独求出 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，从两角和的正切公式入手，只要求出 $\tan\alpha+\tan\beta$ 和 $\tan\alpha\cdot\tan\beta$，这只需要用韦达定理就能解决．这对学生的思维是一种提升．

例 4　在锐角或钝角三角形 ABC 中，求证：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$．

分析　三角形中的等式或不等式问题要注意利用 $A+B+C=\pi$，因此本题应从 $A+B=\pi-C$ 入手，两边同时取正切值．

证明　$\because A$，B，C 是非直角三角形的内角，$\therefore A+B\neq\frac{\pi}{2}$，$C\neq\frac{\pi}{2}$．

$\because A+B=\pi-C$，$\therefore \tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$．

则 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$．

$\therefore \tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$．

故 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$．

相关链接

用类比开拓思路

类比是思维的一种重要形式，经过类比能使知识向更深的层次、更广阔的领域迁移、发展，在教学中，若教师从知识的顺延、从属、引申、互逆、相似等方面考虑，挖掘类比因素，进行类比型的变式教学，无疑会对启发、培养学生思维的广阔性大有裨益．

例 1　公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 有如下类比型变式：

变式(1)，证明 $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$；

变式(2)，求函数 $y=\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)-\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$ 的最值，并证明该函数的值与 α 无关．

又如公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ 可变为：

变式(1)，求证：$\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan(45^\circ+\alpha)$；

变式(2)，求证：$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$；

变式(3)，求证：$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$.

在数学教学中，思维的广阔性能帮助学生从各个条件联系的关联点上，寻求多种解题途径（通常称为“一题多解”）.

例 2 已知 α，β 为锐角，且 $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$，求证：$\alpha<\beta$.

题目要求从三角函数值的相等关系，探知角度的不等关系，仅从观念与运算关系看，涉及的领域也不可谓不广．因此它对思维的广度提出了高要求.

首先从熟知的“普通方法”入手进行迁移.

由于 α，β 是锐角，$\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta\Rightarrow 2\sin\alpha<\sin\alpha+\sin\beta$，

即 $\sin\alpha<\sin\beta$，$\therefore\alpha<\beta$.

迁移到“半角”领域.

由 $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha=\sin\alpha$，

$\therefore\cos\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\dfrac{\beta}{2}=\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

$\because 0<\cos\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)<\cos\dfrac{\alpha}{2}$，

$\therefore\sin\dfrac{\beta}{2}>\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\therefore\beta>\alpha$.

迁移到“余切”领域.

在 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\sin\beta=2\sin\alpha$ 的两边同除以 $\sin\alpha$ 得

$\cos\beta+\sin\beta\cot\alpha=2$，

$\therefore\cot\alpha=\dfrac{2-\cos\beta}{\sin\beta}>\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}=\cot\beta$.

又 α，β 为锐角，可推知 $\alpha<\beta$.

诸如上面的训练，不仅能开拓学生的思路，还能引起他们钻研数学的兴趣，对活跃思维大有帮助．这方面的教学素材比比皆是，而尤以各类知识的“沟通”为基础，如利用复数解三角形问题，用复数与向量解几何问题，用三角方法求几何极值，用三角代换解代数问题，根与系数的关系在解析几何中的应用等.

5.2 二倍角的三角函数

教材线索

本节以填空题的形式推导出二倍角的正弦、余弦、正切公式，接着是公式的应用，从而得出半角及二倍角公式.

教学目标

1. 掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式.

2. 能用上述公式进行简单的求值、化简、恒等证明.

教材分析

1. 重点

二倍角公式的推导.

2. 难点

公式的应用.

3. 二倍角公式适用于二倍角与半角的三角函数之间的互化问题，要熟悉公式的应用，并注意到 $T_{2\alpha}$成立的条件.

4. 二倍角公式不仅限于 2α 是 α 的二倍角形式，以下角的变换也常用二倍角公式：如

$$\alpha=2\times\frac{\alpha}{2}，4\alpha=2\times 2\alpha，\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{\alpha}{4}，3\alpha=2\times\frac{3\alpha}{2}.$$

5. 当 $\alpha=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$或 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$时，$T_{2\alpha}$公式不能用，此时应改用诱导公式.

教学建议

1. 引导学生重新审视 $C_{(\alpha\pm\beta)}$，$S_{(\alpha\pm\beta)}$，$T_{(\alpha\pm\beta)}$这组公式，让学生真正理解两角和与差的公式中 α，β 的取值范围是使公式有意义的一切实数. 在公式中对 α，β 任意赋值，不会改变等式的成立. 因此 $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$，$T_{2\alpha}$这组公式还是让学生从 $C_{(\alpha\pm\beta)}$，$S_{(\alpha\pm\beta)}$，$T_{(\alpha\pm\beta)}$中挑选，从中发现、从中体会将一般化归为特殊的化归方法.

2. 在学习 $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$，$T_{2\alpha}$这些公式时，仍然要强化对角范围的认识，任何时候都不能放

松对角的范围的控制，否则会失之毫厘、谬以千里.

3. 教材中的例 1 是倍角公式的直接使用，例 2 的目的是引出半角公式，鉴于由倍角公式得出 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$，$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$后，要根据$\dfrac{\alpha}{2}$角终边所在象限来讨论$\dfrac{\alpha}{2}$角的正弦、余弦、正切值，并且$\dfrac{\alpha}{2}$角终边所在象限一经确定后，$\dfrac{\alpha}{2}$角的正弦、余弦、正切值都是唯一的，所以有的老师不赞成用“$\pm\sqrt{\quad}$”的形式来表示半角公式，教材采纳了这种观点，在例 3 中只引出了半角公式的平方形式，并且不要求学生记忆. 例 4 是半角公式中正切公式的另一种表示形式.

例题解析

例 1 （教材 P. 133，例 1）已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{5}$，求：

（1）$\tan 2\alpha$；（2）$\tan 4\alpha$；

（3）$\tan\beta$，其中 β 满足 $4\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

分析 本例是三角中的给值求值问题，可以让学生巩固二倍角公式，明确 2α 是 α 的二倍，4α 是 2α 的二倍，理解倍、半角的相对性，明确单角是关键. 第(3)小题同教材 P. 131 的例 2 的思维相似，要求学生学会多变量的处理.

例 2 （教材 P. 134，例 2）已知 α 是锐角，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$，求：

（1）$\sin\dfrac{\alpha}{2}$；（2）$\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

分析 本例是上例问题的逆问题，α 是$\dfrac{\alpha}{2}$的二倍，因而采用换元法，令 $\beta=\dfrac{\alpha}{2}$，再利用二倍角公式列方程就可以解决，体现了方程在中学数学教与学中的重要地位. 同时此例为教材中的例 3 的解决埋下了伏笔.

例 3 （教材 P. 134，例 3）试推出由 $\cos\alpha$ 计算 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$的绝对值的公式.

分析 本例的解决方案基本同上例，新课标的理念是面向全体学生、注重基本、减轻学生的学习负担，因此老版教材中的很多三角公式在新课标中已被降低了要求，只是介绍. 此例为了避开半角公式符号的讨论，而改为求绝对值. 为了照顾学有余力的学生，可以将“绝对值”三字去掉，留作课外思考题，让学生讨论、探究符号的取舍.

例 4 （教材 P. 135，例 4）求证 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

分析 恒等式的证明的主要思路有三种：从左到右，从右到左，证明左、右都等于同一个式子. 原则是：化繁为简. 本例与上例的结论均是半角公式，此公式的推导思路是化异角为同角，要化繁为简，因此采取了从右到左的证明方法，利用二倍角公式化异角为同角. 特

别要注意余弦二倍角公式的选择，从分式的化简要求应该选择能消去 1 的余弦二倍角公式. 本题的另一种证明方法可以采取切化弦，但此方法证明要配、凑及逆用二倍角公式，故本教材未采用这种证明方法.

例 5 （教材 P. 135，例 5）试推出由 $\cos\alpha$ 计算 $\cos 3\alpha$ 的公式.

分析 本例是利用二倍角公式推导三倍角公式，将 3α 化为 $2\alpha+\alpha$，利用两角和的余弦展开后再利用二倍角公式及同角基本关系式就可推出三倍角公式. 此题将本章内容的主要公式都进行了考查，综合应用性较强.

例 6 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解 $\because \sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，

$\therefore \cos\alpha=-\frac{12}{13}$.

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{120}{169}$，

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{25}{169}\right)^2=\frac{119}{169}$，

$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{120}{119}$.

相关链接

三角函数的最值

一、内容综述

三角函数是中学数学的重要内容之一，研究方法主要是代数的方法，它的基础主要是几何中的相似形和圆，因此对三角函数的研究，已经初步把代数和几何联系起来了. 在高中数学中，函数的最值是重要内容之一，同样，三角函数的最值也是非常重要的.

二、例题分析

1. 化为一个角一个三角函数的形式.

例 1 求函数 $y=\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2x+2$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)$上的值域.

分析 化成同角的正弦、余弦，再引进辅助角，即可.

解 $y=\frac{1-\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+2$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+4=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$.

$\because -\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$，$\therefore -\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$.

$\therefore -\frac{1}{2}<\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$.

$\therefore 3<y\leqslant 6$. 即值域为$(3,6]$.

说明　降次公式、倍角公式是三角式化简、求值的常用公式.

2. 化为关于某一个三角函数的二次函数形式.

例 2　当实数 m 取何值时，关于 x 的方程 $2\sin^2 x-\cos x+2m=0$ 有解？

分析　可令 $t=\cos x$（$-1\leqslant t\leqslant 1$），则原方程可化为关于 t 的一元二次方程，可根据区间根求出 m 的范围，但此法较繁；转换视角，若把 m 看成是关于 t 的函数，则当 m 落在关于 t 的函数的值域里时，t 就有解.

解　令 $t=\cos x$，则 $-1\leqslant t\leqslant 1$，原方程可变形为 $2(1-t^2)-t+2m=0$.

$\therefore 2m=2t^2+t-2=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$.

$\because t=-\frac{1}{4}\in[-1,1]$，$\therefore -\frac{17}{8}\leqslant 2m\leqslant 1$.

$\therefore -\frac{17}{16}\leqslant m\leqslant \frac{1}{2}$.

说明　(1) 上述解法是将"方程有解问题"转化为"函数值域问题"，可以减少运算量，提高正确率，即优化解题过程.

(2) 对本题中 $2m+2=2t^2+t$（$-1\leqslant t\leqslant 1$）还可以从函数图象的角度，即数形结合的角度去认识. 即当 m 为何值时，函数 $y=2m+2$ 的图象与函数 $y=2t^2+2$ 的图象在 $[-1,1]$ 上有交点.

(3) 数形结合法不仅可以解决"方程有解问题"而且可以解决"方程解的个数问题".

3. 反函数法或化部分分式.

例 3　求 $y=\frac{1-\cos x}{3+\cos x}$的最值.

解法一　设 $\cos x=f(y)$.

$\because -1\leqslant \cos x\leqslant 1$，

$\therefore -1\leqslant f(y)\leqslant 1$，从而解出 y 的范围.

解法二　$\because y=-1+\frac{4}{\cos x+3}$，且 $-1\leqslant \cos x\leqslant 1$，

$\therefore$ 当 $\cos x=-1$ 时，$y_{\max}=1$，

当 $\cos x=1$ 时，$y_{\min}=0$.

4. 判别式法：把函数化成二次分式函数.

例 4　求函数 $y=\frac{\sin x}{\cos x+2}$的值域.

解　令 $\tan\frac{x}{2}=t$（$t\in\mathbf{R}$），则 $y=\frac{2t}{3+t^2}$，

$\therefore yt^2-2t+3y=0$.

当 $y\neq 0$ 时，$\Delta=4-12y^2\geqslant 0$，$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ 且 $y\neq 0$.

又当 $\sin x=0$ 时，$y=0$.

$\therefore$ 所求函数的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

说明　(1) 除了此法外，更好的解法就是去分母，提出 $\sqrt{a^2+b^2}$，利用 $y=\sin x$ 的有界性来解，具体做法如下：

$\because \cos x+2\neq 0$，

$\therefore$ 原式去分母得 $y\cos x+2y=\sin x$.

$\therefore \sin x-y\cos x=2y$.

$\therefore \sqrt{1+y^2}\sin(x-\varphi)=2y$.

从而 $\sin(x-\varphi)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}$.

$\because |\sin(x-\varphi)|\leqslant 1$，$\therefore \left|\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\right|\leqslant 1$，即 $4y^2\leqslant 1+y^2$.

$\therefore 3y^2\leqslant 1$，解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

注：这种解法是解决这类问题的一种通法.

(2) 若 x 加一个范围，即 $x\in(0, \pi)$，求它的最大值. 此时照样可以用上面两种方法先求出它在 $x\in \mathbf{R}$ 上的最大值，再验证它在 $(0, \pi)$ 上能否取到，故原式在 $(0, \pi)$ 上的最大值就是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 当然还有一种更好的方法就是利用 y 的几何意义来做，$y=\frac{\sin x}{\cos x+2}$ 可以看成是半个单位圆上的一点 $A(\cos x, \sin x)$ 与定点 $B(-2, 0)$ 两点连线的斜率. 半圆主要是因为 $0<x<\pi$，这样立即可得最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，并用此法还可以求出值域为 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

注：上述方法是要以直线方程、斜率知识作为基础的.

例 5　求函数 $y=\frac{\cos x+2}{2\sin x-1}$ 的值域.

分析　可采用例 4 说明中的方法进行求解.

解　$y=\frac{\cos x+2}{2\sin x-1}\Leftrightarrow 2y\sin x-y=\cos x+2\Leftrightarrow 2y\sin x-\cos x=y+2$.

$\therefore |y+2|\leqslant \sqrt{(2y)^2+(-1)^2}$，

$\therefore (y+2)^2\leqslant 4y^2+1$.

$\therefore 3y^2-4y-3\geqslant 0$.

$\therefore y\leqslant \frac{2-\sqrt{13}}{3}$ 或 $y\geqslant \frac{2+\sqrt{13}}{3}$.

$\therefore$ 函数 $y=\frac{\cos x+2}{2\sin x-2}$ 的值域为 $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{13}}{3}\right]\cup\left[\frac{2+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$.

5.3 简单的三角恒等变换

教材线索

本节先利用向量推导出和化积公式，例 1 和例 2 是利用和角、差角公式来证明和差化积公式和积化和差公式，最后是将函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 化简成 $y=A\sin(x+\varphi)(A>0)$ 的形式.

教学目标

正确运用三角公式进行三角函数式的化简、求值以及恒等式的证明.

教材分析

1. 重点

正确运用三角公式进行三角函数式的化简、求值以及恒等式的证明.

2. 难点

如何正确运用三角公式解题.

3. 三角函数的恒等变换是运用三角公式，变换三角表达式中的函数、角度和结构，把一个表达式变换成另一个与它等价的表达式. 三角恒等变换主要包括求值、化简和证明.

4. 教材给出的和差化积以及积化和差公式不要求学生记忆.

5. $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$，其中辅助角 φ 在哪个象限，由 a，b 的符号确定，φ 的值由 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$ 确定.

教学建议

三角恒等变换是代数式恒等变换的推广和发展，进行三角恒等变换，除了要熟练运用代数恒等变换的各种方法，还要抓住三角本身的特点，领会和掌握下列最基本最常见的变换：

（1）公式变换

三角公式是三角恒等变换的基础，必须深刻理解公式、抓住公式的特点，熟练地将三角公式正向、逆向、变形和综合使用.

（2）角度变换

角度变换是三角函数恒等变换的首选方法．在进行三角恒等变换时，对角之间的关系必须进行认真地分析．

（3）函数变换

函数变换是指“弦化切”法和“切化弦”法．在同角三角函数变换中，弦切互化主要是应用公式$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$；在非同角三角变换中，函数变换往往依赖于角度变换．

（4）1的变换

如$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$．

（5）幂的变换

公式$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$常用来升幂和降幂，以便根据需要将三角函数式按一定方向进行变形．

例题解析

例1　（教材P.138，例1）利用和角、差角公式，证明公式：

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

并得出将$\cos\alpha-\cos\beta$化为三角函数乘积的公式．

分析　教材在此例之前已经借助于几何图形用向量推导出了此公式（但未证明角的任意性），此处提出用和角、差角公式证明，让学生体会到代数运算与几何推理各有所长，各有所短，关键是善于运用，扬长避短．从等式的形式上看，右繁左简，应该对右式首先进行处理．由于没有可以应用的公式，而从角的角度看表现得比较复杂，因此可以先简化角的表现形式，从而想到了变量代换，即采取换元的方法，设$A=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$B=\frac{\alpha-\beta}{2}$，解出$\alpha=A+B$，$\beta=A-B$，代回原等式，可以看到左繁右简，而左边现在成为和角的余弦与差角的余弦的和的形式，有公式可用．接下来的证明就比较简单了．应该注意到：角的换元不是先知先觉，而是思考的过程，是化繁为简的要求．

例2　（教材P.139，例2）求证：$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$．

分析　此例是三角中的积化和差公式，证明比上例容易，只要将右式用和角、差角公式展开即可推证．

例3　（教材P.139，例3）（1）将函数$y=\sin x+\cos x$化成$y=A\sin(x+\varphi)$（$A>0$）的形式，并求使它达到最大值时的锐角x．

（2）实数a，b不全为0，求函数$y=a\sin x+b\cos x$的值域．

分析　三角函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$在物理学中有着广泛的应用（单摆运动、交流电的波形均与此函数有关），数学上对它的研究显然有助于学生在物理学上的学习．

第（1）题，教材先用计算机画出了$y=\sin x+\cos x$的图象，让学生先有了一个直观的

感受，再采取代数方法求解．其代数处理方法是：用和角的正弦将 $A\sin(x+\varphi)$ 表示出来后与 $\sin x+\cos x$ 进行对比，得出 $\cos\varphi=\frac{1}{A}$，$\sin\varphi=\frac{1}{A}$，再利用 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ 即可解出满足条件的一个 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，从而达到将 $y=\sin x+\cos x$ 化为 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的形式．

第(2)题，由于第(1)题已给出特殊情况下的处理方法，非特殊情况的处理也就好办了．

此例是三角函数求值域的一种重要方法，它同时还告诉了学生数学中一种常用的思考方法——以“退”为“进”．

例 4 （教材 P. 141，例 4）已知 $\cos\alpha+\cos\beta\neq 0$，化简 $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$．$\Big($可以利用公式 $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)$．

分析 本例给出了两种解法，解法一的思路是化简分式，应考虑将分子、分母都化为积的形式以便产生公因式约分．解法二采用了构造向量，利用向量的运算解决，再一次体现了向量在三角中的应用．

例 5 化简：

（1）$\frac{1+\cos\theta-\sin\theta}{1-\sin\theta-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta-\sin\theta}{1-\sin\theta+\cos\theta}$；

（2）$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$．

解 （1）原式$=\dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$$=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=-\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=-2\csc\theta.$$

（2）原式$=\dfrac{\cos 2\alpha}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1.$$

相关链接

证明三角恒等式的常用策略

三角恒等式的证明，常用综合法（执因索果）和分析法（执果索因），证明的常用策略有化繁为简，左右归一，化差为零，等价化归等，不论采用什么证明方法，都要认真分析等式两边三角函数式的特点、角度和函数关系，找出差异，寻找证明的突破口.

策略一　“化繁为简”

例 1　求证：$\dfrac{3}{\sin^2 40^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 40^\circ}=32\sin 10^\circ$.

分析　从左式入手，通分，再利用平方差公式，逆用和角公式，最后应用诱导公式，倍角化简到右边.

证明　$\because$ 左边 $=\dfrac{(\sqrt{3})^2}{(\sin 40^\circ)^2}-\dfrac{1}{(\cos 40^\circ)^2}=\dfrac{(\sqrt{3}\cos 40^\circ)^2-(\sin 40^\circ)^2}{\sin^2 40^\circ\cos^2 40^\circ}$

$$=\frac{(\sqrt{3}\cos 40^\circ+\sin 40^\circ)(\sqrt{3}\cos 40^\circ-\sin 40^\circ)}{\sin^2 40^\circ\cos^2 40^\circ}$$

$$=\frac{4\cdot 2^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\sin 40^\circ\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ-\frac{1}{2}\sin 40^\circ\right)}{(2\sin 40^\circ\cos 40^\circ)^2}$$

$$=\frac{16\sin 100^\circ\sin 20^\circ}{\sin^2 80^\circ}=\frac{16\sin 80^\circ\sin 20^\circ}{\sin^2 80^\circ}=\frac{16\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$=\frac{32\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=32\sin 10^\circ=\text{右边}.$$

策略二　“左右归一”

例 2　求证：$\dfrac{\tan\theta(1+\sin\theta)+\sin\theta}{\tan\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta}=\dfrac{\tan\theta+\sin\theta}{\tan\theta\sin\theta}$.

分析　左右两式通过“切割化弦”及应用倍角公式，都可得到一个共同的值 $\cot\dfrac{\theta}{2}$，因而得证.

证明　左边 $=\dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1+\sin\theta)+\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1+\sin\theta)-\sin\theta}=\dfrac{1+\cos\theta+\sin\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2},$$

$$\text{右边}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2},$$

所以左边=右边，故等式成立.

策略三 “化差为零”

例 3 求证：$\frac{\cos\alpha+1-\sin\alpha}{\cos\alpha+1+\sin\alpha}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

分析 通过运用同角三角函数公式及 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 等公式的化简，可得到左边－右边=0，从而左边=右边，即得证.

证明 左边－右边$=\frac{(\cos\alpha+1-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha-(1-\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha+1+\sin\alpha)}{(\cos\alpha+1+\sin\alpha)\cdot\cos\alpha}$.

因为分子$=\cos^2\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha-1-\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha+\sin^2\alpha$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1=0$,

所以左边－右边=0.

策略四 “等价化归”

例 4 求证：$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

分析 先转换命题，只需证 $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$，再利用角的关系 $2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$，$(\alpha+\beta)-\alpha=\beta$，可证得结论.

证明 $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\sin\beta$,

两边同除以 $\sin\alpha$，即得$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

习题参考解答

5.1.1 练习（教材 P.129）

1. （1）$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$；（2）$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2. （1）$2\cos\alpha\cos\beta$；（2）$-2\sin\alpha\sin\beta$；

   （3）$2\sin\alpha\cos\beta$；（4）$2\cos\alpha\sin\beta$.

3. $\frac{\sqrt{2}}{10}$与$\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\frac{7\sqrt{2}}{10}$与$-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

4. （1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$\frac{1}{2}$；（3）$\frac{\sqrt{2}}{2}$；（4）$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.1.2 练习（教材 P.131）

1. $-(2+\sqrt{3})$.

2. （1）$-\sqrt{3}$；（2）1.

3. （1）0；（2）$\sqrt{3}$.

习题 1（教材 P.132）

1. （1）$-\frac{33}{65}$；（2）$\frac{63}{65}$；（3）$-\frac{56}{65}$；（4）$\frac{16}{65}$.

2. （1）$-\sin x$；（2）$\sqrt{3}\cos y$.

3. （1）$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$；（2）$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

4. （1）$\cos\beta$；（2）$-\sin\beta$.

5. $-\frac{11}{7}$，13.

6. 2.

7. 证明：（1）

$$
\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
=&(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\
=&\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
=&\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta\\
=&\cos^2\alpha-\sin^2\beta;
\end{aligned}
$$

（2）同理可得.

8. $\frac{\sqrt{2}+4}{6}$，$\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

9. $\frac{\pi}{4}$.

10. 7.

11. $\frac{3}{22}$.

12. $\frac{1}{2}$.

13. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

5.2 练习（教材 P.136）

1. （1）$\frac{1}{4}$；（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$；（3）$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. （1）$\cos 2x$；（2）$\sin x+\cos x$.

3. 证明：（1）$\because \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，

$\therefore \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

（2）同理可得.

（3）
$$\begin{aligned}\sin 3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)\\&=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

习题 2（教材 P.136）

1. $\frac{3}{2}$.

2. -1.

3. （1）$\frac{4\sqrt{2}}{9}$，$-\frac{7}{9}$，$-\frac{4\sqrt{2}}{7}$；（2）$\frac{\sqrt{6}}{3}$，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$-\sqrt{2}$.

4. $\frac{24}{25}$，$\frac{7}{25}$，$\frac{24}{7}$.

5. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\frac{\sqrt{10}}{10}$，3.

6. 证明：（1） $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}+\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}$$

$$=\frac{4\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=2\tan 2\alpha;$$

（2） $\dfrac{2\cos^2x-1}{1-2\sin^2x}+\sin 2x$

$$=\frac{\cos 2x}{\cos 2x}+\sin 2x=1+2\sin x\cos x$$

$$=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x$$

$$=(\sin x+\cos x)^2;$$

（3） $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$$

$$=\cos 2\alpha.$$

5.3 练习（教材 P. 141）

1. 证明：（1）设 $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，

   则 $A+B=\alpha$，$A-B=\beta$.

   于是 $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

   $$=\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

   $$=2\sin A\cos B=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

   （2）同理可得.

2. 证明：（1）将公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，

   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 左右两边分别相加，得

   $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$.

   两边同除以 2 得 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$.

   （2）、（3）同理可得.

3. $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

习题 3（教材 P. 142）

1. （1）$\dfrac{1}{2}\sin(\alpha+2\beta)$；（2）$\cos x$.

2. （1）0；（2）0.

3. $-\sqrt{3}$.

4. $\frac{3}{4}$.

5. （1）$\sqrt{2}$；（2）2.

复习题五（教材 P. 153）

1. $-\frac{3}{11}$.

2. $\frac{2}{9}$.

3. $\sqrt{3}$.

4. 1.

5. 证明：$\because \alpha$，β 为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{5\sqrt{50}}{50}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又$\because \alpha$，β 为锐角，则 $0<\alpha+\beta<\pi$，

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

6. $\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

7. 证明：$P=iV=i_{\mathrm{m}}\sin\omega t\cdot V_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=i_{\mathrm{m}}\sin\omega t\cdot V_{\mathrm{m}}\cos\omega t=\frac{1}{2}i_{\mathrm{m}}V_{\mathrm{m}}\sin 2\omega t$.

8. 1.

9. 1.

10. （1）π；（2）$[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$；

（3）函数的图象可以由函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，再将所得图象向上平移 2 个单位得到.

11. 1

12. 以 3 为底边，2 为高时容积最大，最大为 $\frac{9}{2}$.

13. $\tan\frac{n+1}{2}\alpha$.